ALOCAÇÕES, ESTABILIDADE E OTIMIZAÇÃO

uma introdução passo a passo

Aline Guarnieri Gubitoso
Vinicius Cifú Lopes

ALOCAÇÕES, ESTABILIDADE E OTIMIZAÇÃO

uma introdução **passo a passo**

1ª Edição

São Bernardo do Campo - SP
2017

Sumário

Apresentação 1

1 O algoritmo de Gale-Shapley 5
1.1 Conceitos de estabilidade e bloqueio 5
1.2 O mecanismo da aceitação postergada 7
1.3 O conceito de otimalidade 16
1.4 Programação de um computador 19

2 Três extensões do problema 23
2.1 Trabalhando com indiferenças 23
2.2 Trabalhando com números diferentes de indivíduos 31
2.3 Permitindo poligamia 38
2.4 Recapitulação 45

3 Resolução por programação linear 47
3.1 Programação linear 47
3.2 Programação linear pelo Excel 54
3.3 Otimização linear no problema do casamento 61
3.4 Emparelhamento estável igualitário 77
3.5 Discussão 79

4 Manipulação e trapaças 81
4.1 Como ocorre a trapaça 82
4.2 Coalizões 87
4.3 Evitando a trapaça 89

5 O problema das admissões em universidades 91
5.1 Exemplo com Gale-Shapley 92
5.2 Incertezas na prática descentralizada 94
5.3 Semelhança e distinção com o problema do casamento 94
5.4 Casos reais: residência médica e escolas públicas 99

6 O problema dos colegas de quarto 107
6.1 Algoritmo para resolução 108
6.2 Relação com o problema do casamento 120

7 A matrícula em disciplinas na UFABC 123
7.1 O método contemporâneo 124
7.2 Nossa proposta 126

Bibliografia comentada 137

Apresentação

Como podemos casar homens e mulheres de modo que não surjam amantes?

A correspondência um a um entre homens e mulheres é chamada *emparelhamento* e, além disso, é *estável* quando não existirem homem e mulher que se prefiram simultaneamente aos respectivos cônjuges.

David Gale e Lloyd Shapley reconheceram essa condição em 1962 e, ao mesmo tempo, perceberam que um emparelhamento estável pode ser obtido por um procedimento passo a passo: uma versão organizada de propostas de casamento feitas pelos homens e comparadas pelas mulheres. Gale e Shapley ainda colocaram outro problema na mesma perspectiva de alocação por preferências: o da admissão em universidades.

Duas décadas depois, Alvin Roth reconheceu que o procedimento descrito já era aproximadamente utilizado na seleção de médicos residentes pelos hospitais dos Estados Unidos, investigou as condições de funcionamento do procedimento e desenvolveu diversas variantes com fins específicos. O corpo de conhecimento resultante, a "teoria do emparelhamento", também teve forte colaboração da brasileira Marilda Sotomayor e, devido à sua ampla aplicabilidade e sucesso na alocação de recursos, foi uma das inovações comemoradas em 2012 com a concessão do Nobel em economia a Shapley e Roth.

Pretendemos, neste livro, trazer o assunto ao público escolar, com uma apresentação lusófona dos primeiros conceitos e técnicas envolvidos, para que o próprio estudante possa aplicá-los em situações similares que encontre e adquira entusiasmo por alguns tópicos de ciências econômicas, ciência da computação e matemática.

Esta exposição é voltada aos jovens no ensino médio ou ingressantes no ensino superior, como uma opção de assunto para estudo paralelo ao currículo obrigatório, seja orientado ou individual. Procuramos, portanto, adotar um discurso informal e detalhado que explica também algumas técnicas simples de raciocínio matemático, como: a introdução de objetos adicionais para equiparar quantidades diferentes de elementos; a resolução de questões de indiferença com uma extensão artificial da ordem; a metodologia de elementos notacionais auxiliares; o uso de variáveis booleanas na escrita de equações. Incluímos, enfim, um ou outro exercício de prática ou reflexão, mas sem pretender a compleição de um livro didático.

Tivemos a preocupação de não apenas apresentar as "receitas" para atingir cada objetivo proposto – especialmente os algoritmos Gale-Shapley e *Simplex* (reduzido) –, mas, também, comentar por que funcionam e por que terminam (ou seja, obtêm seu objetivo após um número finito de passos), mesmo que de modo informal. Incluímos, também, uma apresentação pormenorizada de como montar problemas de otimização linear para resolução no programa Excel, de modo que o estudante poderá adaptá-la a qualquer situação.

Mantemos a nomenclatura tradicional de exposição, que fala em "casar grupos de homens e mulheres, com os homens fazendo propostas de casamento e as mulheres avaliando suas melhores opções". Apesar de extremamente machista, esse vocabulário é imediatamente claro para o leitor iniciante e tem, mesmo, a vantagem de usar seu aspecto machista para elucidar pontos importantes da teoria. Contudo, em momento algum fazemos apologia do machismo ou da cultura patriarcalista!

Começamos com a descrição dos conceitos relevantes e do algoritmo de Gale-Shapley, para grupos de homens e mulheres com o mesmo número de indivíduos. Depois, tratamos de três expansões: listas de preferência com possíveis indiferenças; números diferentes de homens e mulheres; poligamia. Consideramos, então, outra teoria, a programação linear, ilustrando um processo manual de resolução e o uso do Excel, para, então, verificar como o problema do casamento pode ser formulado para esse tipo de otimização. Um capítulo relata

brevemente a possibilidade de qualquer procedimento de emparelhamento ser trapaceado através da prestação de falsas preferências e quais pontos de apoio existem para inibir esse mau comportamento. Outro capítulo trabalha sobre o problema de admissão em universidades, com mais detalhes do que a redução poligâmica oferece, e relata o caso concreto da residência médica americana.

Apresentamos, também, o problema dos colegas de quarto, que requer o emparelhamento de indivíduos pertencentes a um único grupo e que ordenam segundo suas preferências, portanto, todos os demais participantes. A solução utiliza o algoritmo Gale-Shapley em uma primeira etapa, mas requer passos adicionais e uma alocação estável não é mais sempre possível.

Finalmente, descrevemos, como um objeto de pesquisa, o sistema de matrícula em disciplinas na Universidade Federal do ABC, que é um problema de alocação por excelência e bastante complicado em vista da liberdade curricular característica da instituição e da necessária limitação de oferta de disciplinas e horários. Também em um formato adequado ao nosso público, propomos uma solução baseada nessas técnicas históricas.

Incluímos uma bibliografia comentada, permitindo-nos utilizar mais esse espaço para a apresentação de informações adicionais. Queremos incentivar, portanto, o leitor a estudar, ainda essas últimas páginas.

Este trabalho é produto da iniciação científica da primeira autora, sob orientação do segundo autor na UFABC, de agosto de 2014 a julho de 2015. Ambos os autores contribuíram igualmente para a redação de todos os capítulos.

Agradecemos a Rodrigo Lima e Clarissa Felippe por discutirem versões anteriores do projeto de pesquisa e a Renata Coelho por nos apresentar o sistema de matrículas em disciplinas da Graduação na UFABC. Agradecemos, também, ao CNPq, pelo apoio em forma de bolsa de iniciação científica para a primeira autora.

São Bernardo do Campo
Abril de 2016

O algoritmo de Gale-Shapley

Em vários problemas cotidianos, os preços não podem ser um mecanismo de alocação de recursos. Por exemplo, a atribuição de órgãos humanos a pacientes para transplante, por motivos éticos, não pode ser regulada por pagamentos financeiros, dando prioridade a quem possa pagar mais.

Nós estudaremos a questão de estabilidade nas resoluções desses problemas. Exemplo de sua aplicação é a promoção, de forma abstrata, de pares perfeitos (envolvendo, assim, dois conjuntos de agentes), como de uniões entre homens e mulheres, estudada a partir do questionamento: "Como deve ser combinada uma mesma quantidade de homens e mulheres da melhor forma possível, respeitando suas preferências individuais?".

A solução encontrada por David Gale e Lloyd Shapley (1962) foi a utilização de regras pré-estabelecidas segundo um *algoritmo*, ou procedimento formado por passos ou etapas. Esse algoritmo baseia-se no "princípio da aceitação postergada" (em inglês *deferred acceptance*), isto é, as propostas de casamento somente serão definitivamente aceitas ao final do processo.

1.1 Conceitos de estabilidade e bloqueio

Vamos considerar a situação em que, havendo dois conjuntos de indivíduos ou *agentes*, estes devam ser combinados uns com os

outros da melhor forma possível, formando uma bijeção (correspondência um a um) entre os dois conjuntos, chamada *emparelhamento*.

↪**Definição:** O emparelhamento é *instável* se houver um agente A pareado a um agente X, mas que preferiria estar com um agente Y, que também o preferiria. Nessa situação, há um "ganho inexplorado", uma vez que, se A se unisse a Y, ambos estariam em uma melhor situação segundo suas preferências.

↪**Definição:** O emparelhamento é *estável* se não for instável.

No seguinte exemplo, temos 3 homens e 3 mulheres: Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Ana (A); Beatriz (B) e Carolina (C). Cada indivíduo tem uma lista de preferências, em que ordena os indivíduos do grupo oposto (com a utilização do símbolo ">"):

Xavier:	$B > C > A$	Ana:	$X > Z > Y$
Yuri:	$A > C > B$	Beatriz:	$X > Y > Z$
Zé:	$B > C > A$	Carolina:	$Y > X > Z$

Isso significa que Xavier prefere Beatriz, depois Carolina, e, por último, Ana.

A partir desses elementos, quais combinações entre homens e mulheres seriam possíveis? Quais desses emparelhamentos seriam adequados segundo a descrição acima de estabilidade?

Contamos três opções de esposa para o primeiro homem, sobrando duas para o segundo, e, depois, uma para o terceiro, de modo que, multiplicando esses números, há seis emparelhamentos possíveis:

(1)	$X - A$; $Y - B$; $Z - C$	(4)	$\boldsymbol{X - B}$; $Y - C$; $Z - A$
(2)	$X - A$; $Y - C$; $Z - B$	(5)	$X - C$; $Y - A$; $Z - B$
(3)	$\boldsymbol{X - B}$; $Y - A$; $Z - C$	(6)	$X - C$; $Y - B$; $Z - A$

Dentre essas seis possibilidades, podemos verificar pareamentos instáveis e estáveis, de acordo com a ideia de ganhos perdidos ou não.

As alocações que reúnem dois agentes que se preferem mutuamente são a 3 e a 4; isso porque as demais alocações não combinam Xavier e Beatriz, agentes que precisam, necessariamente, estar juntos porque se preferem mutuamente. Logo, o par (Xavier, Beatriz) bloqueia a formação de qualquer combinação de casais que não o una.

↬**Definição:** Um *par de bloqueio* é, como (A, Y) na definição de instabilidade acima, um par de agentes que preferiria estar pareado entre si a seus respectivos pares.

Além disso, um emparelhamento pode ser considerado bloqueado por um agente se, para ele, tal alocação for absolutamente inaceitável, isto é, pior do que continuar sem combinação. No caso do problema do casamento, trata-se da preferência por permanecer solteiro, uma variação do problema que estudaremos mais à frente, no próximo capítulo.

1.2 O mecanismo da aceitação postergada

Foi em busca de soluções estáveis aos problemas cotidianos que o algoritmo de Gale-Shapley foi estudado, testado empiricamente e, até mesmo, aplicado no mundo real, ainda que sua aplicação difira deste ideal em alguns pontos.

As operações para a promoção do casamento estável a partir deste algoritmo podem ser utilizadas tanto pelos homens, sendo quem propõe o casamento, como pelas mulheres, propondo-o ao grupo oposto. Ainda assim, o resultado das uniões não precisa ser necessariamente igual nas duas formas para que as alocações sejam consideradas estáveis, uma vez que qualquer alocação formada por este algoritmo é provada estável.

Quando temos situações com uma quantidade muito grande de elementos, como o número de vestibulandos procurando universidades, não é viável procurarmos todas as combinações possíveis

entre os agentes e, depois, dentre estas, as que são estáveis (isto é, que não sofrem bloqueio e não são instáveis). Logo, a utilização do algoritmo será extremamente vantajosa para a descoberta mais rápida e eficiente de uma alocação estável, ainda que seu resultado seja somente a apresentação de uma única combinação possível de estabilidade dentre várias possíveis. Se é necessária a descoberta de todas as opções estáveis de alocação, teríamos que usar um segundo algoritmo para a resolução do problema, além do que apresentaremos.

Para expor esse raciocínio pelo qual se desenvolve o algoritmo de Gale-Shapley, segue uma demonstração do processo de alocação de casais em atribuições estáveis. A título de exemplo, tomamos o universo de 5 homens e 5 mulheres, sendo eles: Victor (*V*); Wilson (*W*); Xavier (*X*); Yuri (*Y*); Zé (*Z*); Ana (*A*); Beatriz (*B*); Carolina (*C*); Débora (*D*); Érica (*E*).

A fim de seja respeitada a preferência individual de cada uma dessas pessoas, cada uma deve listar os membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento. Assim, o primeiro passo do algoritmo é que as pessoas de ambos os grupos listem as pessoas do grupo oposto segundo uma ordem de preferência.

> ➥**Notação:** Para denotar a preferência de A por X antes de Y, utilizamos o símbolo ">", da seguinte forma: $X >_A Y$, que significa que A prefere X a Y. Além disso, utilizamos o mesmo sinal com o sentido oposto < na forma de $Y <_A X$ para, também, denotar que Y é menos preferível que X por A.

Começando pelos homens, Victor determina sua lista de preferência da seguinte forma: ele prefere Ana a Carolina, mas prefere Carolina a Débora. Senão, prefere Débora a Érica e, por fim, Érica é mais preferível que Beatriz. Sendo assim, sua primeira opção é Ana e sua última opção é Beatriz, ou seja:

Victor: $A > C > D > E > B$

Já Wilson ao fazer sua própria lista, ordena suas próprias preferências, de modo que escolhe Ana como a mulher mais preferível para se casar, preferindo-a a Débora. Admite, porém, que preferiria Débora a Érica e Érica a Beatriz, ainda que preferisse Beatriz a Carolina, de forma que Beatriz fosse sua penúltima opção, enquanto Carolina fosse a última, ou seja:

$$\text{Wilson: } A > D > E > B > C$$

Dessa forma, seguem-se as listas de preferência de cada indivíduo:

Victor:	$A > C > D > E > B$	Ana:	$Z > W > V > Y > X$
Wilson:	$A > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$
Xavier:	$D > C > B > A > E$	Carolina:	$Z > W > V > X > Y$
Yuri:	$A > D > B > E > C$	Débora:	$V > W > Y > X > Z$
Zé:	$C > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$

O segundo passo é a proposta de um grupo ao outro, segundo a lista de preferência de cada pessoa do grupo que faz alguma coisa. Nós identificaremos os homens como *agentes proponentes* e as mulheres, que somente poderão escolher dentre as propostas recebidas, como *agentes seletores*.

➥ **Notação:** Para denotar quem propõe a quem, usaremos uma flecha especial "$\rightsquigarrow$", da seguinte forma: X, Y, ... $\rightsquigarrow A$ que significa que X, Y, ... propõem para A. A escolha por este símbolo em especial é motivada pelo fato de que é utilizada em física para indicar transferência ou envio de informação, o que corresponde à situação de fazer uma proposta de casamento. Para indicar quando ninguém propõe a A, usaremos o símbolo de vazio: $\emptyset \rightsquigarrow A$.

Assim, os homens propõem às mulheres de que mais gostam, de forma a escolher a primeira em cada lista de preferência.

↬**Notação:** Para denotar o parceiro correspondente de cada indivíduo, utilizaremos a moldura □ ao redor desse parceiro na lista do indivíduo.

As propostas da primeira rodada começam com:

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{A} > C > D > E > B$	$V \rightsquigarrow A$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{D} > C > B > A > E$	$X \rightsquigarrow D$
Yuri:	$\boxed{A} > D > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow A$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

A preferência de Victor, Wilson e Yuri é por Ana, de forma que todos eles propõem a ela, enquanto Xavier escolhe propor a Débora e Zé a Carolina, uma vez que são elas as mulheres de que eles mais gostam.

Em sequência, as mulheres que receberam pedidos ou propostas de casamento (se houver alguma) escolhem o parceiro que acreditam ser a opção mais atrativa, rejeitando as outras propostas.

↬**Notação:** Para indicar a escolha de um indivíduo a um outro, como a escolha de uma mulher por um homem, utilizaremos o símbolo ":", de forma que A: X significa que A escolhe a proposta de X.

Assim, cada mulher, ao analisar as propostas que recebeu (se recebeu alguma), escolhe, dentre os homens que lhe propuseram, aquele que é o mais preferível em sua lista de preferência rejeitando as demais propostas (se houver).

1ª Rodada – escolhas

$V, W, Y \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$	$\therefore A{:}W$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	
$Z \rightsquigarrow C$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$	$\therefore C{:}Z$
$X \rightsquigarrow D$	Débora:	$V > W > Y > \boxed{X} > Z$	$\therefore D{:}X$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$	

No caso de Ana, entre Victor, Wilson e Yuri, segundo sua lista de preferência, o preferido Wilson. Assim, ela escolhe Wilson. Já Carolina, por somente receber a proposta de Zé, escolhe-o automaticamente. Também Débora escolhe Xavier, porque é o único que lhe propõe. Portanto, na primeira rodada de propostas, as escolhas são feitas de tal modo, que Wilson é escolhido por Ana, Zé por Carolina e Xavier por Débora, enquanto Victor e Yuri são rejeitados por Ana.

Atenção: É importante registrar a rejeição por cada mulher nas listas dos homens pretendentes, para executar o algoritmo de forma manual. No papel, podemos optar por riscar as sucessivas opções, mas, aqui, adotaremos uma notação específica. Além disso, também é natural riscar as listas das mulheres, mas veremos que não há necessidade nesse caso.

↪**Notação:** Para denotar que A rejeitou V, marcaremos um circunflexo em $\hat{A}$ na lista de V.

Contudo, o processo continua com a segunda rodada de escolhas a partir de novas propostas feitas às mulheres pelos homens que foram rejeitados, de forma que os homens rejeitados façam, então, uma nova proposta, dessa vez, às mulheres que acreditam ser a segunda melhor opção.

2ª Rodada – propostas

Victor:	$\hat{A} > \boxed{C} > D > E > B$	$V \rightsquigarrow C$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{D} > C > B > A > E$	$X \rightsquigarrow D$
Yuri:	$\hat{A} > \boxed{D} > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow D$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

No caso de Victor, ao ser rejeitado por Ana, ele decide propor a Carolina, enquanto Yuri, também rejeitado por Ana, propõe a Débora. Os homens que foram escolhidos na rodada anterior continuam a propor às mesmas mulheres que os escolheram.

Dadas as novas propostas, as mulheres analisam suas novas opções, assim como as que haviam escolhido na etapa anterior, e escolhem uma delas cada, rejeitando as demais.

2ª Rodada – escolhas

$W \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$	$\therefore A{:}W$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	
$V, Z \rightsquigarrow C$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$	$\therefore C{:}Z$
$X, Y \rightsquigarrow D$	Débora:	$V > W > \boxed{Y} > X > Z$	$\therefore D{:}Y$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$	

Ana, por não receber nenhuma nova proposta, continua com Wilson, ao passo que Carolina, mesmo recebendo uma nova proposta por parte de Victor, continua a escolher Zé. Entre Xavier e a nova proposta de Yuri, Débora prefere Yuri, escolhendo, assim, trocar de parceiro. Consequentemente, Victor e Xavier são os homens rejeitados.

Uma vez que esse processo continua até que todos os homens sejam escolhidos por alguma mulher ou rejeitados por todas elas, dado que nenhum homem volta a propor a uma mulher que já o rejeitou (porque, uma vez rejeitado, ele a elimina de sua lista), a terceira rodada do algoritmo continua com novas propostas:

3ª Rodada – propostas

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	$V \rightsquigarrow D$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\hat{D} > \boxed{C} > B > A > E$	$X \rightsquigarrow C$
Yuri:	$\hat{A} > \boxed{D} > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow D$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

Xavier, que foi rejeitado por Débora, decide, nesta rodada, propor a Carolina, enquanto Victor, que foi rejeitado tanto por Ana como por Carolina, propõe agora a Débora. Ao mesmo tempo, as propostas anteriores bem-sucedidas mantêm os parceiros, como as uniões de Wilson e Ana, Yuri e Débora, Zé e Carolina.

Feitas as novas propostas, as mulheres que as receberam, Débora e Carolina, comparam tais pedidos, enquanto que as demais mulheres continuam com o companheiro escolhido anteriormente:

3ª Rodada – escolhas

$W \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$	$\therefore A{:}W$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	
$Z, X \rightsquigarrow C$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$	$\therefore C{:}Z$
$Y, V \rightsquigarrow D$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$	$\therefore D{:}V$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$	

Ao não receber nenhuma nova proposta, Ana continua com Wilson. Simultaneamente, Carolina também continua a escolher o mesmo parceiro da rodada anterior, Zé, ainda que tenha recebido uma proposta de Xavier. Contudo, Débora prefere trocar seu parceiro anterior, Yuri, ao escolher Victor como seu novo parceiro. Em conformidade com tais decisões, na terceira rodada de escolhas, temos Ana emparelhada a Wilson, Carolina com Zé e Débora com Victor, sendo as propostas de Xavier e Yuri as rejeitadas.

Por isso, na quarta rodada, Xavier e Yuri, os homens rejeitados na rodada anterior, fazem novas propostas, segundo a ordem de suas listas de preferência:

4ª Rodada – propostas e escolhas

Cada homem propõe à primeira mulher, em sua lista, que não o rejeitou:

$$V \rightsquigarrow D;\ W \rightsquigarrow A;\ X, Y \rightsquigarrow B;\ Z \rightsquigarrow C.$$

Cada mulher opta pelo melhor homem, em sua lista, que lhe propôs (agora ou na rodada anterior):

$$D : V;\ \ A : W;\ \ B : X;\ \ C : Z.$$

Dessa maneira, de acordo com o processo descrito, após essa nova rodada de propostas e escolhas, obtemos:

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > \boxed{X} > Y > Z > W$
Xavier:	$\hat{D} > \hat{C} > \boxed{B} > A > E$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} > \hat{B} > \boxed{E} > C$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > \boxed{Y} > V$

Devido ao de fato de que Beatriz, até então, não havia recebido nenhuma proposta, ao receber simultaneamente as propostas de Xavier e Yuri, ela decide que, entre eles, prefere Xavier. Dessa forma, Yuri é o único homem ainda rejeitado.

Portanto, na quinta rodada, somente Yuri faz uma nova proposta:

5ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow D;\ W \rightsquigarrow A;\ X \rightsquigarrow B;\ Y \rightsquigarrow E;\ Z \rightsquigarrow C.$$
$$D : V;\ A : W;\ B : X;\ E : Y;\ C : Z.$$

Mais uma vez ocorre uma mudança nas alocações a partir da nova proposta dessa rodada, feita por Yuri a Érica, após ser rejeitado três vezes. Ela aceita-o automaticamente por ser a única proposta que recebe:

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > \boxed{X} > Y > Z > W$
Xavier:	$\hat{D} > \hat{C} > \boxed{B} > A > E$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} > \hat{B} > \boxed{E} > C$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > \boxed{Y} > V$

Finalmente, não é mais preciso continuar o processo, porque, nesta última rodada, nenhum homem foi rejeitado, de forma que todos os homens e mulheres estão agora casados em um emparelhamento considerado estável (não há nenhuma mulher que preferisse estar com algum homem que também preferisse estar com ela, ao invés de sua parceira).

Por exemplo, se Victor não é casado com Ana, mesmo que a preferisse como sua primeira opção ao invés de Débora (sua esposa), é porque, no passado, ele propôs a Ana, mas foi rejeitado em favor de alguém de que ela gostava mais, no caso, Wilson (e, caso Ana depois rejeitasse Wilson, seria por Zé, ainda melhor). Portanto, o par (V, A) não é um par de bloqueio e o mesmo raciocínio se aplica a qualquer outro par.

Note que o algoritmo sempre *termina*, isto é, sua execução chega a um término, porque: cada lista de preferência é finita; o número de agentes proponentes é finito; nenhum deles repete uma proposta após rejeição.

Nos próximos capítulos, teremos mais oportunidades de acompanhar o desenvolvimento do algoritmo Gale-Shapley passo a passo. A próxima seção contém exercícios que o leitor já pode efetuar, bastando que ignore a comparação dos emparelhamentos obtidos.

1.3 O conceito de otimalidade

Nesse mecanismo de alocações que distribui de maneira estável os indivíduos, há uma configuração específica nos resultados que impõe o algoritmo como mais favorável a um dos grupos, dos homens ou das mulheres, especificadamente àquele que faz as propostas. Isto porque quem faz as propostas, como os homens, no exemplo acima, começa sempre com a possibilidade de unir-se à sua melhor opção, por fazer o pedido a quem mais gosta, porém, se não for escolhido por ela, ainda tem chance de propor à sua segunda melhor opção e, se for rejeitado mais uma vez, pode fazer o pedido à sua terceira opção, e assim por diante, até que seja escolhido por uma ou rejeitado por todas. Consequentemente, como mostra a movimentação de sua moldura □ da esquerda para a direita, o homem termina o processo de alocação com a melhor opção possível de parceira que também o prefira.

Ao passo que uma mulher, ao depender dos pedidos dos homens, somente consegue escolher a melhor opção dentre as que recebe e não a que viria ser sua melhor opção na lista de preferências, pois, se o homem que mais lhe agrada não lhe propor, não poderá escolhê-lo. A partir da primeira proposta que recebe, pode escolher um parceiro e trocá-lo conforme receber uma proposta melhor a cada rodada, mas não é garantido que chegue até sua melhor opção, especialmente se receber somente uma proposta. Assim, suas escolhas, motivadas por suas preferências individuais, representadas pela moldura □, deslocam-se da direita para a esquerda, no sentido oposto ao dos homens. Concluímos que as mulheres obtêm suas piores opções possíveis.

Exemplo disso é o pareamento de Beatriz com Xavier, sua segunda melhor opção, no desenvolvimento da seção anterior: para isso, ela rejeitou a proposta de Yuri, mas, mesmo assim, não alcançou o que considera o melhor pareamento, uma vez que Victor, sua primeira escolha, não lhe fez nenhuma proposta.

Em vista disso, os economistas identificam a seguinte classificação:

➥**Definição:** Uma alocação é *ótima* para um conjunto de agentes se, nessa alocação, cada um obtém o melhor par que poderia obter em qualquer alocação.

Esse é o caso do emparelhamento realizado pelo algoritmo quando os homens propõem, sendo ótimo para o conjunto de todos os homens, dentre os demais emparelhamentos estáveis.

Para cada agente, o *melhor par possível* (ou seu "*ótimo*") não é, necessariamente, o primeiro em sua lista de preferência (em nosso exemplo, para Xavier, o melhor possível é Beatriz, e, não, Débora). É com esse cuidado que a literatura técnica faz tal referência e que também falaremos neste livro.

Observação: Nosso raciocínio com as molduras se deslocando, acima, *sugere* que o emparelhamento obtido é ótimo para o conjunto de agentes proponentes; porém, não constitui uma *demonstração*, que precisa considerar qualquer outro emparelhamento potencialmente melhor, não obtido pelo método descrito. Esse cuidado também será necessário no Capítulo 4, que versa sobre estratégias.

Para fazer a demonstração, suponha que um homem X pode casar, em um segundo emparelhamento pretensamente estável, com uma mulher A que prefere à esposa atribuída pela execução de Gale-Shapley com os homens proponentes. Então, A o rejeitou durante esta execução em nome de Y, a quem prefere. Dentre todas as situações, vamos trabalhar, portanto, com a *primeira vez* que uma tal A rejeita um tal X. Nesse caso, Y ainda não foi rejeitado, durante esta execução, por mulheres com quem poderia se casar num outro emparelhamento estável. Concluímos que todas as suas "esposas viáveis" são, digamos, B, C, ... $\leq_Y A$. Em particular, naquele segundo emparelhamento pretensamente estável, Y casa-se com alguma $B <_Y A$, então (Y, A) forma um par de bloqueio ao segundo emparelhamento, que não pode ser estável.

Outra característica do algoritmo é dada pelo fato de que, no desenvolver do mecanismo, utilizado tanto na forma de homens

propondo como na de mulheres, a partir das mesmas listas de preferência, nem sempre os casais formados serão os mesmos nas duas situações, o que não impede que sejam considerados estáveis. Assim, caso sejam as mulheres a realizar propostas, podemos obter um outro emparelhamento, ótimo para as mulheres e péssimo para os homens. Nesse caso, é possível comparar todos os emparelhamentos estáveis e mostrar que se situam entre esses dois extremos, o ótimo para os homens e o ótimo para as mulheres.

No entanto, também é possível ocorrer situações, dependendo das listas de preferência, em que sejam formados casais iguais nos dois processos. Nessas situações, como qualquer outro emparelhamento estável deve estar entre os dois ótimos, concluímos que existe somente essa alocação estável, que é ótima para todos. Para os indivíduos envolvidos não há nenhuma outra alocação que os beneficie mais, sem comprometer a condição de estabilidade.

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo, a partir das mesmas listas de preferência do exemplo acima, do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, verificando a existência de emparelhamento ótimo para todos (com resultado igual ao exemplo acima). Repetimos as listas abaixo:

Ana:	$Z > W > V > Y > X$	Victor:	$A > C > D > E > B$
Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	Wilson:	$A > D > E > B > C$
Carolina:	$Z > W > V > X > Y$	Xavier:	$D > C > B > A > E$
Débora:	$V > W > Y > X > Z$	Yuri:	$A > D > B > E > C$
Érica:	$W > Z > X > Y > V$	Zé:	$C > D > A > B > E$

Resultado: O emparelhamento é ótimo para todos, pois, em ambos os processos, obtemos os pares $V – D$; $W – A$; $X – B$; $Y – E$ e $Z – C$.

2) A partir das seguintes listas de preferência, determine os emparelhamentos feitos tanto quando os homens propõem como quando as mulheres propõem e analise se ocorre uma alocação ótima para todos:

Otávio (O):	$J > L > N > I > M$	Isabella (I):	$T > O > R > S > P$
Pedro (P):	$I > J > L > M > N$	Joana (J):	$T > S > R > O > P$
Rodrigo (R):	$I > M > J > L > N$	Laura (L):	$T > P > O > R > S$
Sérgio (S):	$J > L > M > I > N$	Marina (M):	$P > R > S > T > O$
Thiago (T):	$M > J > I > L > N$	Natália (N):	$R > O > S > P > T$

Resultado: Os pares formados quando os homens propõem são: $O - N$, $P - L$, $R - I$, $S - J$, $T - M$. Os pares formados quando as mulheres propõem são: $I - R$, $J - T$, $L - P$, $M - S$, $N - O$. Consequentemente, não há um emparelhamento ótimo para todos, porque as alocações diferem e os pares Sérgio–Joana e Thiago–Marina são trocados.

1.4 Programação de um computador

Esta seção é voltada ao leitor interessado na programação do algoritmo Gale-Shapley em um computador; em outras palavras, como o mesmo pode ser implementado em uma linguagem de programação sequencial.

A importância da noção de algoritmo e de ter algoritmos para resolver problemas é que tais métodos são totalmente especificados em uma sequência de passos ou etapas, não deixando nenhum procedimento ou escolha a critério de quem os utiliza. Desse modo, primeiramente, tais procedimentos podem ser delegados a máquinas que trabalham muito rápido, mas sem nenhuma criatividade: os computadores.

Em segundo lugar, se duas pessoas seguirem o mesmo algoritmo para resolver um mesmo problema (com as mesmas informações), elas deverão obter o mesmo resultado, ainda que trabalhem de modo independente. (Algoritmos podem, sim, utilizar fontes aleatórias de informação, com fins de simular um mesmo experimento ou montagem muitas vezes e variadamente, mas produzirão o mesmo resultado toda vez que a mesma sequência de informação for utilizada.) O resultado obtido com o algoritmo, por sua vez, é definido pelo método e passível de estudo formal, como vimos ao identificar a otimalidade de Gale-Shapley para os agentes proponentes, o que não seria possível para uma escolha arbitrária de emparelhamento estável, nem demonstrável sem conhecer o funcionamento do método.

A principal diferença desta seção em relação à apresentação anterior, que já é "procedural", consiste na representação apropriada das informações no computador, mas, fazemos, também, uma pequena modificação no procedimento em que, antes, as mulheres avaliavam todas as propostas recebidas, inclusive aquela selecionada na rodada anterior, enquanto agora avaliarão cada proposta assim que for recebida. Essa alteração pode diminuir o número de rodadas ou antecipar a rodada de rejeição para cada homem, mas mantém o mesmo resultado.

Utilizamos alguns raciocínios e estruturas presentes em Knuth (1997), especialmente sua Aula 6. Porém, não o seguimos totalmente; utilizamos alguma redundância e trabalhamos com nossa hipótese atual de um mesmo número de homens e mulheres, digamos n.

O programa representará tanto os homens como as mulheres como números de 1 a n. A primeira tarefa é ler e armazenar suas listas de preferência. Começamos com uma matriz ListasHomens, cuja posição (i,j) registra a j-ésima opção do homem i em ordem decrescente. Desse modo, ListasHomens é semelhante à listagem que fizemos no texto:

```
para i de 1 a n:
    para j de 1 a n:
        leia k (identificação da mulher);
        armazene k em ListasHomens (i,j).
```

As listas das mulheres serão armazenadas de um modo diferente, para facilitar a comparação das propostas recebidas: a posição (i,j) da matriz NotasMulheres identificará, para a mulher i, qual é a "nota" do homem j em sua lista, de modo que o primeiro homem tem nota n o segundo tem nota $n-1$ e assim por diante, até o último, que tem nota 1. Observe que os homens mais preferidos têm notas mais altas. Essa lista requer cuidado em seu carregamento, a partir das listas, como feitas nos exemplos:

```
para i de 1 a n:
    para k de 1 a n:
        leia j (identificação do homem);
        armazene n + 1 – k em NotasMulheres (i,j).
```

Agora precisamos criar um registro de onde está a moldura nas listas dos homens e das mulheres. Para os homens, registraremos a posição da moldura, mas, para as mulheres, registraremos o conteúdo da moldura. Usaremos, para começar, o número 0, mas pode ser necessário adotar outro número ou símbolo, dependendo do uso dos índices acima na linguagem de programação. Também precisamos saber quem está rejeitado ou sem propostas.

```
para i de 1 a n:
    armazene 0 em MoldurasHomens(i) e NoivosMulheres(i);
    armazene SIM em HomensLivres(i) e MulheresLivres(i);
```

Agora, fazemos com que cada homem realize sua proposta e seja avaliado pela mulher eleita, que pode ou não o substituir em detrimento do anterior (se houver). Ela fará isso em uma cadeia de condicionais “se–caso contrário”:

```
(*) para i de 1 a n:
    se HomensLivres(i) = SIM então:
        aumente MoldurasHomens(i) uma unidade;
        armazene MoldurasHomens(i) em j;
        se MulheresLivres(j) = SIM então:
            armazene i em NoivosMulheres(j)
            armazene NÃO em MulheresLivres(j) e HomensLivres(i).
        caso contrário, se
          NotasMulheres(j,i)>NotasMulheres(j),NoivosMulheres(j)
        então:
            armazene SIM em HomensLivres(NoivosMulheres(j);
            armazene NÃO em HomensLivres(i);
            armazene i em NoivosMulheres(j).
```

Devemos verificar se algum homem foi rejeitado, o que requer uma nova rodada de propostas:

```
para i de 1 a n:
    se HomensLivres(i) = SIM então:
        retorne ao ponto (*).
```

No caso de um número distinto de homens e mulheres, veremos, futuramente, que se deve incluir nessa condição o teste de ainda não ter percorrido toda a sua lista de preferência.

Finalmente, podemos imprimir os casais formados:

para *i* de 1 a *n*:
    escreva "*i* casado com MoldurasHomens(*i*)".

Uma preocupação moderna com algoritmos é sobre sua eficiência, isto é, o número de passos ou operações que o algoritmo requer que o computador faça, especialmente em função do tamanho do problema especificado, aqui, o número n de homens ou mulheres. Mesmo com os últimos avanços da tecnologia, preocupações com o tempo de execução e com o espaço necessário (tamanho da memória) são cotidianos, porque as dimensões dos problemas a serem tratados na prática também crescem rapidamente.

Informações mais apropriadas sobre eficiência, sua definição e seu cálculo, constituem um tema da ciência da computação e podem ser inicialmente obtidas em Knuth (1997) e Gusfield; Irving (1989). Aqui, relatamos apenas que Gale-Shapley, na forma desta seção, pode requerer passos da ordem de até n^2 para terminar; por "ordem", aqui, entende-se que esse número de passos, em função de n, é um polinômio de segundo grau ou é limitado por um tal polinômio; para valores muito grandes de n, o termo de segundo grau domina os demais. Note que também a entrada de dados, isto é, a leitura das listas de preferência, já requer $2n^2$ operações de leitura simples; então, é significativo que o procedimento em si não supere essa ordem.

2

Três extensões do problema

Nossa apresentação do algoritmo de Gale-Shapley, no capítulo anterior, concentrou-se em um caso particular: mesmo número de homens (agentes proponentes) e mulheres (agentes seletores), com listas de preferência estritamente ordenadas e cada homem ou mulher sendo emparelhado a um único parceiro.

Agora, *relaxaremos* cada uma dessas condições, trabalhando, também, com situações de indiferença, números diferentes de homens e mulheres e casos de poligamia. Veremos que algumas dessas situações podem ser resolvidas por métodos novos, ainda que inspirados no original.

Porém, destacaremos que as três situações podem ser *reduzidas* ao cenário já estudado e resolvidas com o mesmo algoritmo. Uma *redução* de um problema B a um problema A é simplesmente uma transcrição da situação de B na linguagem e no contexto de A. Desse modo, resolvendo o problema assim transcrito com o método de A, obtemos uma solução de B invertendo a transcrição feita.

Nós veremos mais reduções nos capítulos seguintes, especialmente a de emparelhamento ao problema geral de otimização linear.

Também introduziremos a operação com listas incompletas de preferência, que adotaremos no restante do livro.

2.1 Trabalhando com indiferenças

Na situação-problema descrita e utilizada no capítulo anterior, tanto os homens como as mulheres, ao listarem uma ordem de

preferência pelos indivíduos do grupo oposto segundo seus gostos, sempre esclareceram quais eram estas preferências. Entretanto, nem sempre uma determinada pessoa tem preferência sobre outras: assim, é necessário discutir situações em que há indiferença.

↬**Definição:** Utilizamos o conceito de indiferença para denotar situações em que dois ou mais elementos não são um mais preferido que o outro por alguém, em uma lista de preferência.

Dessa forma, mais uma vez, a título de exemplo para essa nova situação-problema, o universo foi determinado de forma aleatória como de homens e mulheres, sendo eles: Victor (*V*); Wilson (*W*); Xavier (*X*); Yuri (*Y*); Zé (*Z*); Ana (*A*); Beatriz (*B*); Carolina (*C*); Débora (*D*); Érica (*E*).

Como no exemplo anterior, cada uma dessas pessoas deve listar os membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento, porém com a ressalva de que, agora, pode exprimir a equivalência entre alguns indivíduos, se houver.

↬**Notação:** Para denotar que A é indiferente, isto é, não tem preferência por X ou Y, utilizaremos o símbolo "≡", de modo que $X \equiv_A Y$ significa: para A, o indivíduo X não é mais ou menos preferível a Y, ou seja, ambos são equivalentes.

Assim, o primeiro passo é que as pessoas de ambos os grupos listem as pessoas do grupo oposto segundo uma ordem de preferência ou indiferença:

Victor:	$A \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > V \equiv W > Y > X$
Wilson:	$A > D > E > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$
Xavier:	$C \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > X > Y$
Yuri:	$A > D \equiv B > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv Z$
Zé:	$D \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$

Uma vez esclarecidas as preferências e indiferenças de cada pessoa, começam as propostas dos homens às mulheres de que mais gostam, seja cada uma determinada (se há somente uma preferida), seja escolhida aleatoriamente (dentre as equivalentes).

Precisamos explicitar uma nova regra: se uma pessoa recebe uma nova proposta e, para ela, são equivalentes o novo candidato e quem ela havia escolhido na rodada anterior, então ela não trocará de parceiro, pois não haveria um ganho ao trocar o que "já tem" por algo que é "igual".

Observação: Substituindo o símbolo "≡" pelo símbolo ">", obtemos listas estritamente ordenadas com as quais já sabemos trabalhar. Suponha que conhecemos um emparelhamento estável de acordo com essas novas listas: então, não há um homem e uma mulher que se prefiram aos seus respectivos pares, ou seja, se temos os casais $I - P$ e $J - Q$ então $P >_I Q$ ou $J >_Q$ I. Desse modo, segundo as listas originais, $P >_I Q$ ou $P \equiv_I Q$ ou $J >_Q I$ ou $J \equiv_Q I$. Como supomos que um agente não troca parceiros equivalentes, mesmo que haja ganho estrito para outro agente, o emparelhamento obtido é estável também segundo as listas originais.

Essa observação nos mostra que o caso de indiferença pode ser prontamente reduzido ao caso de preferências estritas.

Contudo, faremos uma execução do algoritmo considerando diretamente as listas com indiferença e a hipótese de não substituição de equivalentes.

Também é importante esclarecer que, nessa situação, quando estudada em trabalhos práticos como em simulações computacionais, a indiferença entre parceiros pode ser removida artificialmente, após a formação das listas de preferência, por uma escolha aleatória pelo agente no momento de criar sua lista ou pelo computador ao identificar o primeiro indivíduo (ou um outro) entre os equivalentes. Dessa forma, durante a execução deste exemplo, utilizaremos a escolha aleatória sempre pelo indivíduo que aparecer primeiro na lista de preferência de um agente indiferente. Contudo, existe a possibilidade de formar outros arranjos pela escolha de outro

indivíduo dentre os equivalentes, por exemplo, sempre a última pessoa ou uma sorteada. Portanto, a tomada de decisão dependerá de quais regras serão estabelecidas para orientar o processo artificial de escolha aleatória. Tal como na vida real, quando um indivíduo é obrigado a escolher, mesmo que por itens em indiferença, alguma característica influenciará sua decisão. Para denotar a escolha aleatória de um agente por um dentre os indivíduos equivalentes, ainda utilizaremos a moldura $\square$.

Em resumo, quando um agente faz uma proposta ou seleciona dentre propostas sem ter uma anterior, escolherá aquela que ocupa a melhor posição na lista; quando seleciona dentre propostas equivalentes, inclusive uma anterior, manterá esta oferta mais antiga.

De acordo com as listas de preferência, as propostas da primeira rodada começam com:

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	$V \rightsquigarrow A$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B \equiv C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	$X \rightsquigarrow C$
Yuri:	$\boxed{A} > D \equiv B > E > C$	$Y \rightsquigarrow A$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	$Z \rightsquigarrow D$

Como Victor é indiferente quanto à sua primeira escolha ser Ana ou Carolina, uma possível alocação, escolhida de forma artificial e aleatória para o exemplo, é a proposta dele a Ana. Porém, Wilson e Yuri também propõem a Ana, por ser ela sua primeira opção determinada. Semelhantemente, Xavier, que também se encontra em uma situação de indiferença, faz uma proposta a Carolina e Zé faz uma proposta a Débora.

Como o passo seguinte é a análise que cada mulher faz das propostas que recebeu (se recebeu alguma) para, assim, escolher a que acredita ser a mais atrativa ou escolher aleatoriamente entre dois homens que não são um mais preferível que o outro, temos:

1ª Rodada – escolhas

$V,W,Y \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$	$\therefore A{:}V$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$	
$X \rightsquigarrow C$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$	$\therefore C{:}X$
$Z \rightsquigarrow D$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$	$\therefore D{:}Z$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$	

Ana, ao ter de escolher entre Victor, Wilson e Yuri, sendo indiferente a Victor ou Wilson segundo sua lista de preferências, escolhe Victor segundo nossa convenção e rejeita Wilson (equivalente a Victor, mas listado depois dele) e Yuri (cuja proposta é inferior). As outras mulheres recebem uma ou nenhuma proposta e seguem o procedimento usual.

Na segunda rodada de escolhas, a partir das escolhas da tabela anterior, são feitas novas propostas:

2ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow A \qquad \therefore A : V$$
$$X \rightsquigarrow C \qquad \therefore C : X$$
$$W,Y,Z \rightsquigarrow D \qquad \therefore D : Z$$

Neste momento, Débora recebeu as novas propostas de Wilson e Yuri para comparar com a de Zé, que ela já tinha. Contudo, as três opções lhe são equivalentes, de modo que ela prefere continuar com Zé, mesmo Wilson sendo o primeiro listado entre eles. Foi importante, aqui, Zé ter "chegado antes" a Débora.

Dessa forma, obtemos as seguintes tabelas:

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$
Wilson:	$\hat{A} > \hat{D} > E > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} \equiv B > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$

Na continuação do processo, a terceira rodada inicia-se com:

3ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow A;\ W \rightsquigarrow E;\ X \rightsquigarrow C;\ Y \rightsquigarrow B;\ Z \rightsquigarrow D.$$

Com isso, temos:

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$
Wilson:	$\hat{A} > \hat{D} > \boxed{E} > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv \boxed{Y} \equiv Z > W$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} \equiv \boxed{B} > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y \equiv V$

Isso conclui o processo de emparelhamento.

Logo, todos os homens e mulheres estão agora pareados de maneira estável, isto é, não há nenhuma mulher que preferisse estar com algum homem que também preferisse estar com ela, ao invés de sua parceira. Note que Wilson preferiria estar com Débora, mas, para ela, seu atual parceiro Zé é equivalente a Wilson e, portanto, a substituição não valeria a pena.

Portanto, emparelhamentos estáveis são possíveis inclusive quando ocorrem casos de indiferença, que pressupõem a escolha aleatória entre escolhas equivalentes, visto que, nessa situação, mesmo quando um dos indivíduos é indiferente a uma escolha, ele ainda tem de fazê-la (ainda que seja aleatória e artificialmente). Desse modo, a indiferença, na verdade, é eliminada, tornando a lista com indiferença uma lista sem indiferença (dentre várias possíveis), uma vez que continuam a serem feitas escolhas entre os indivíduos. Modificando essas escolhas quando há equivalência, porém, obtemos resultados diferentes, todos constituindo emparelhamentos estáveis para as listas de equivalência deste exemplo, como veremos no primeiro exercício a seguir.

Porém, podem não existir mais emparelhamentos que sejam ótimos para os homens ou para as mulheres, conforme destacam Roth; Sotomayor (1990, ex. 2.15).

Observação: Para os agentes proponentes, essa convenção de usar o primeiro da lista corresponde à substituição do símbolo "≡" pelo símbolo ">", como observamos no início. Então, se I tem a lista de preferências

$$I: P > Q \equiv R \equiv S > T,$$

na verdade, nós trabalhamos com a lista

$$I: P > Q > R > S > T.$$

Para os agentes seletores, não temos como fazer essa conversão de antemão, porque precisamos saber quem faz cada proposta. Porém, obtemos tal informação durante a execução do algoritmo. Suponha, então, que P tem a lista de preferências

$$P: I > J \equiv K \equiv L > M$$

e que, dentre J, K e J (um grupo de equivalentes entre si), P receba *primeiro* a proposta de K, rejeitando depois as de J e L se houver. Nesse caso, o comportamento de P é como se $K >_P J, L$ e obtemos uma lista estrita para P escolhendo uma relação arbitrária entre J e L, assim:

$$P: I > K > J > L > M.$$

Essa lista é a utilizada por P na execução do algoritmo, para todos os efeitos.

Ter montado listas estritas para todos os agentes, de modo que a execução do algoritmo corresponda ao preceito de não substituição de equivalentes, mostra que também essa formulação produz emparelhamentos estáveis.

❖ Exercícios

1) Mostre que as listas de preferência do exemplo acima podem ser tornadas iguais às listas de preferência estrita que utilizamos como

exemplo no primeiro capítulo, com uma ordenação adequada das opções equivalentes. Confira, por outro lado, que o emparelhamento que obtivemos aqui difere daquele resultado.

2) Aplique o algoritmo, a partir das mesmas listas de preferência acima, agora do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, utilizando as regras de proposta à primeira opção e escolha (dentre equivalentes) pela opção anterior, se houver, ou então pela primeira opção. Repetimos as listas a seguir:

Ana:	$Z > V \equiv W > Y > X$	Victor:	$A \equiv C > D > E > B$
Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$	Wilson:	$A > D > E > B \equiv C$
Carolina:	$Z > W \equiv V > X > Y$	Xavier:	$C \equiv D > B > E \equiv A$
Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv Z$	Yuri:	$A > D \equiv B > E > C$
Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$	Zé:	$D \equiv C > A \equiv B \equiv E$

Resposta: O emparelhamento obtido é bem diferente, somente tendo o casal Victor e Ana em comum: $A - V$; $B - X$; $C - Z$; $D - W$ e $E - Y$.

3) A partir das listas de preferência abaixo, aplique novamente o algoritmo com as regras apresentadas em ambas as situações: homens proponentes e mulheres proponentes.

Otávio (O):	$N > M > I > J \equiv L$	Isabella (I):	$O > P \equiv S > T > R$
Pedro (P):	$N \equiv J > I > M > L$	Joana (J):	$O \equiv T \equiv S > R > P$
Roberto (R):	$L > I \equiv N > J > M$	Laura (L):	$R > S \equiv T \equiv O \equiv P$
Sérgio (S):	$I > M > N \equiv L \equiv J$	Marina (M):	$O \equiv P \equiv R > T > S$
Thiago (T):	$L > J \equiv I > M > N$	Natália (N):	$S \equiv O \equiv R > T \equiv P$

Resposta: Com a proposta dos homens às mulheres, obtemos os seguintes resultados: $O - N$; $P - M$; $R - L$; $S - I$ e $T - J$. Neste caso, a regra de indiferença é utilizada quando I não troca S por P. Com as mulheres sendo quem propõe, os pares formados são: $I - P$; $J - T$; $L - R$; $M - O$ e $N - S$.

4) Verifique que, com as listas do exercício anterior e substituindo imediatamente o símbolo "≡" pelo símbolo ">", obtemos casais diferentes quando o emparelhamento é realizado segundo as propostas dos homens: $O - N$; $P - I$; $R - L$; $S - M$ e $T - J$.

2.2 Trabalhando com números diferentes de indivíduos

O algoritmo também pode ser utilizado para tratar de situações de alocações com números desiguais de, por exemplo, homens e mulheres. Veremos como acomodar essa diferença em três momentos: com a adição de novos agentes "curingas" nas listas de preferência; sem o uso de curingas, reformulando as condições de conclusão do algoritmo (isto é, quando sabemos que o procedimento chegou ao final); com a consideração de listas incompletas de preferência, que é o tratamento mais geral e do qual nos serviremos no restante do livro.

Solução com curingas

Acrescentar um "curinga" ou um novo objeto à estrutura existente é um artifício ubíquo em raciocínios matemáticos. O curinga será considerado um novo agente, terá uma lista de preferência própria e deverá ser incluído nas listas de preferência dos agentes originais.

Para realizar isso, se o indivíduo não informa nada a não ser a listagem de uma ordem de preferência pelas pessoas do outro grupo, o curinga é colocado no final de sua lista de preferência. Por outro lado, se essa pessoa informar (ou o sistema acomodar essa informação), o curinga pode ir em qualquer lugar na ordem de preferência desse indivíduo, separando quem essa pessoa gostaria de casar de quem ela não aceitaria. Esse curinga pode, inclusive, ir no começo de uma lista de preferência ao ser também utilizado como uma preferência pelas pessoas que escolhem ficar sozinhas a parear-se com quaisquer pessoas do outro grupo. Porém, se um indivíduo for alocado a um curinga sem que esta fosse sua preferência, significa que todas as pessoas do grupo oposto rejeitaram sua proposta, de modo que, ao ser alocado a um curinga, esta pessoa fica solteira.

Em razão dessa possibilidade, finalmente iremos tratar de ocorrências em que um agente acredita que determinada alocação é pior do que continuar sem combinação, no caso, continuar solteiro; porém, descobriremos uma imperfeição nesse procedimento, relacionada à assimetria entre quem propõe e quem apenas seleciona propostas.

↣**Notação:** Para denotar o curinga, utilizaremos o símbolo $\blacksquare$.

Para ilustrar essa problemática, o universo foi montado como de 5 homens e 4 mulheres, sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E) .

Deste modo, mais uma vez é iniciado o processo com a listagem que cada uma dessas pessoas faz dos membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento; com a diferença, entretanto, de que, agora, eles podem incluir o curinga em sua lista de preferência quando e se preferirem ficar solteiros a escolher alguma das opções que ainda não listaram.

Incluímos uma lista de indiferença para o curinga, de modo a contemplá-lo no algoritmo.

Victor:	$C > D > \blacksquare > E > B$	Beatriz:	$Y > X > Z > V > W$
Wilson:	$B > E > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > Y > V > Z$
Xavier:	$B > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > Z > Y > V > W$
Yuri:	$C > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$
Zé:	$D > B > C > E > \blacksquare$	$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

A partir da listagem dessas preferências, de acordo com o processo já explicado anteriormente, começam as rodadas de propostas dos homens às mulheres que acreditam ser as mais preferíveis e subsequentes escolhas de cada mulher pelo melhor homem dentre os que lhe propõe.

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{C} > D > \blacksquare > E > B$	$V \rightsquigarrow C$
Wilson:	$\boxed{B} > E > C > D > \blacksquare$	$W \rightsquigarrow B$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	$X \rightsquigarrow B$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	$Y \rightsquigarrow C$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$Z \rightsquigarrow D$

1ª Rodada – escolhas

$W, X \rightsquigarrow B$	B:	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$	$\therefore B : X$
$V, Y \rightsquigarrow C$	C:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$	$\therefore C : Y$
$Z \rightsquigarrow D$	D:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$	$\therefore D : Z$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	E:	$W > Z > X > Y > V$	
	$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$	

Conforme as decisões desses indivíduos, na rodada seguinte temos:

2ª Rodada – propostas e escolhas

Victor:	$\hat{C} > \hat{D} > \blacksquare > E > B$	Beatriz:	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$
Wilson:	$\hat{B} > \boxed{E} > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y > V$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

Na terceira rodada, Victor, como o único homem rejeitado, faz uma nova proposta:

3ª Rodada – propostas e escolhas

Victor:	$\hat{C} > \hat{D} > \boxed{\blacksquare} > E > B$	Beatriz	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$
Wilson:	$\hat{B} > \boxed{E} > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y > V$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$\blacksquare$:	$\boxed{V} \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

Logo, o processo termina aqui, quando todos os agentes estão ou pareados com alguém do grupo oposto ou solteiros.

Esse exemplo é particular, no sentido de que o número de mulheres é exatamente um a menos que o de homens, de modo que

algum homem ficaria solteiro (não haveria mulheres o suficiente para todos os homens). Entretanto, nenhum homem foi alocado a um curinga por ter suas propostas rejeitadas por todas as mulheres, devido ao fato de que Victor, de livre e espontânea vontade (ou seja, segundo sua lista de preferências), escolheu ficar sozinho. Isso porque, para ele, se ele não casasse com Carolina ou Débora, não haveria nenhuma outra mulher com quem ele aceitaria se casar; assim, ao ser sua terceira opção continuar solteiro, Victor esclarece que, para ele, qualquer casamento com as demais mulheres (Érica ou Beatriz) seria inaceitável, isto é, seria pior do que continuar solteiro.

Contudo, se Victor tivesse uma lista de preferência diferente, em que preferisse Érica e Beatriz à opção de ficar solteiro (ou seja, ficar solteiro seria sua última opção), ele ainda seria o homem solteiro da alocação (agora forçado), uma vez que, com a continuação do processo, suas propostas a Érica e Beatriz seriam ambas rejeitadas.

Outras listas de preferência, é claro, podem levar a situações distintas.

Em geral, podemos usar mais curingas, de modo que sua quantidade corresponda à diferença exata entre os totais dos grupos, sendo que, em cada lista de preferência, eles devem estar contíguos e ser equivalentes (por motivos de lógica). Por exemplo, se forem 5 homens e 3 mulheres, teremos dois curingas em sequência na lista de preferências fornecida por cada homem.

❖ Exercício

1) Aplique o algoritmo do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, a partir das mesmas listas de preferências acima, verificando qual dos homens ficaria solteiro e se seria de forma forçada (rejeitado por todas as mulheres) ou por opção (propondo ao curinga antes de alguma mulher). Repetimos as listas abaixo:

Beatriz:	$Y > X > Z > V > W$	Victor:	$C > D > ■ > E > B$
Carolina:	$W > X > Y > V > Z$	Wilson:	$B > E > C > D > ■$
Débora:	$X > Z > Y > V > W$	Xavier:	$B > C > E > D > ■$
Érica:	$W > Z > X > Y > V$	Yuri:	$C > B > D > E > ■$
■:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$	Zé:	$D > B > C > E > ■$

Resposta: Ao verificarmos que os pares formados são $B - Y$, $C - X$, $D - Z$, $E - W$, percebemos que Victor continua a ser o homem que fica solteiro, de forma forçada, uma vez que nenhuma mulher lhe propõe. Note que, neste caso, há menos agentes proponentes que receptores.

Observação: Nossa conclusão sobre curingas servirem para separar opções "aceitáveis" e "inaceitáveis" é natural e válida para os agentes proponentes (homens), devido ao fato de suas molduras deslocarem-se sempre da opção mais preferida para a menos preferida durante a execução de Gale-Shapley. Porém, o deslocamento contrário para os agentes seletores (mulheres) inviabiliza essa manobra.

Tentar resolver esse problema só gera confusão: por exemplo, se pusermos as opções inaceitáveis *antes* do curinga e as aceitáveis *depois*, contrariamente ao próprio espírito de ordenação das listas de preferência, nem assim obteremos uma solução.

Não devemos pensar nisso como um defeito do artifício de usar curingas, que tem o mérito de destacar essa confusão assim que se pensa no caso, mas como um reflexo do exagero no seu uso.

Para o problema inicial de números diferentes de indivíduos, os curingas podem ser utilizados sem problemas, *sempre ao final* das listas de preferência originais; no entanto, procuraremos, também, uma solução diferente.

Depois retomaremos a questão das opções inaceitáveis (na literatura, o curinga pode aparecer, em uma lista de preferência, usado para tão somente *delimitar* as opções aceitáveis e as inaceitáveis).

Solução sem curingas

Como visto acima, a utilização do curinga é um facilitador para a resolução de problemas com diferentes números de indivíduos.

Entretanto, existe uma outra forma de tornar esta situação-problema resolvível através da modificação das condições de encerramento do algoritmo.

Note que, nas explicações e exemplos até aqui, definimos que o algoritmo chegava ao fim quando todos os agentes que faziam as propostas estavam pareados a agentes do outro conjunto. Então, acordamos que o processo continua enquanto algum proponente ainda tiver, em sua lista de preferência, alguns candidatos seletores a quem propor. Ou seja, o processo termina quando, após uma rodada completa de propostas e escolhas, cada proponente ou está pareado a algum seletor ou foi rejeitado por todos, terminando solteiro.

❖ **Exercício**

1) Quais alterações são necessárias no programa de computador descrito na Seção 1.4 para acomodar essa nova condição de parada e os números diferentes de homens e mulheres?

No caso específico de o número de agentes proponentes ser menor que o de seletores, digamos h homens e m mulheres com $h \leq m$, o encerramento do processo pode ser descrito de outro modo: é quando h mulheres diferentes estão pareadas. Porém, essa descrição não será válida no caso de listas incompletas, que adotaremos a seguir.

Listas incompletas de preferência

Uma solução que comporta a manifestação de opções aceitáveis ou inaceitáveis é, simplesmente, não listar as opções inaceitáveis nas listas de preferência, isto é, cada homem listará somente as mulheres com as quais aceita se casar e cada mulher listará somente os homens que considera aceitáveis. Naturalmente, as listas podem ter números variados de integrantes e deverão ser tratadas com a formulação do algoritmo que trata números diferentes de indivíduos.

O novo procedimento sempre encontrará uma solução estável, em um número finito de etapas, mas poderá acontecer que agentes (possivelmente todos) resultem solteiros.

Por exemplo, A: $X > Y$ significa que A prefere X e depois Y, mas se não for emparelhado com nenhum dos dois, A prefere não admitir nenhum outro agente. Analogamente, a lista X: A significa que X prefere o agente A mas se não conseguir tal resultado, então prefere não ter nenhum outro. (Alguns autores exprimem que tal agente será "alocado a si mesmo".)

Nessa situação, os agentes rejeitam automaticamente as propostas vindas de quem não está em suas listas, de modo que, para acelerar o procedimento, podemos previamente remover A da lista de X se X não está na lista de A (porque A não aceitaria X), no caso de X propor e A selecionar. Também, após a montagem das listas de preferência, podemos retirar do procedimento quem já não aceita ninguém como parceiro.

É com esta formulação em mente que trabalharemos a partir de agora, ao expressar as listas de preferência dos nossos exemplos.

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo às listas de preferência seguintes, em que há duas mulheres a menos, tanto da perspectiva dos homens propondo, como quando as mulheres propõem:

Victor:	A	Ana:	$Z > W > V > Y > X$
Wilson:	$A > C > B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$
Xavier:	$B > C > A$	Carolina:	$Z > W > V > X > Y$
Yuri:	$A > B$		
Zé:	$C > A > B$		

Resposta: Em ambas as situações, Victor e Yuri permanecem solteiros, enquanto se formam os casais $W – A$, $X – B$ e $Z – C$.

2) Aplique o algoritmo às listas de preferência seguintes, em que há duas mulheres a menos, tanto da perspectiva dos homens propondo, como quando as mulheres propõem:

Victor:	C	Ana:	$Z > Y > X > V$
Wilson:	$A > B > C$	Beatriz:	$Y > X > W > V$
Xavier:	$A > C > B$	Carolina:	$X > V > Y$
Yuri:	$C > A > B$		
Zé:	$B > C > A$		

Resposta: Quando os homens propõem, formam-se os casais $X – C$, $Y – A$ e $Z – B$. Quando as mulheres propõem, formam-se os casais $A – Z$, $B – Y$ e $C – X$. Em ambas as situações, Victor e Wilson permanecem solteiros.

2.3 Permitindo poligamia

O algoritmo, além de conseguir tratar de situações com indiferença e com números desiguais de homens e mulheres, também pode ser adaptado para uma análise das situações em que ocorre pareamento de um indivíduo com mais de um único elemento do outro grupo. Ou seja, iremos discutir agora a situação em que, por exemplo, um homem deseja ter mais de uma companheira.

Faremos isso criando “vagas” ou “*slots*” para múltiplas mulheres na “carteira” de cada homem.

↪**Procedimento:** Para denotar que X escolhe ter 3 parceiras, utilizaremos índices numéricos da seguinte forma: X_1, X_2, X_3, que significa dizer que cada X_i corresponde a uma das “vagas” para parceira de X.

Para ilustrar essa ocorrência, o universo foi determinado de forma aleatória como de 2 homens e 7 mulheres, sendo eles: Xavier (X); Yuri (Y); Ana (A); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E); Flávia (F); Glória (G). Acrescentamos que Xavier deseja ter três

parceiras e Yuri procura por duas parceiras. Em consequência disso, Xavier tem três “vagas” para companheira, enquanto que Yuri tem duas “vagas”, com um total de cinco vagas, e duas mulheres ficarão solteiras. Débora e Glória, porém, aceitam somente um homem cada. Os agentes têm as seguintes preferências:

Xavier:	$D > F > C > B > A > G > E$	Ana:	$Y > X$
Yuri:	$C > D > B > G > E > A > F$	Beatriz:	$X > Y$
		Carolina:	$X > Y$
		Débora:	Y
		Érica:	$X > Y$
		Flávia:	$Y > X$
		Glória:	X

Dessa forma, o processo de listagem das preferências que cada uma dessas pessoas faz em relação aos membros do outro grupo é o mesmo. Porém, agora, cada homem tem uma lista para cada “vaga”. Para a execução do algoritmo, as vagas são consideradas como “pessoas diferentes”. Por outro lado, todas as listas de preferência das vagas de um mesmo homem devem ser as mesmas e idênticas às preferências desse homem. Finalmente, tais vagas são equivalentes nas listas das mulheres, porque correspondem ao mesmo homem:

$X_1: D > F > C > B > A > G > E$	$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$X_2: D > F > C > B > A > G > E$	$B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$X_3: D > F > C > B > A > G > E$	$C: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$Y_1: C > D > B > G > E > A > F$	$D: Y_1 \equiv Y_2$
$Y_2: C > D > B > G > E > A > F$	$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
	$F: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
	$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

À medida que as rodadas se desenvolvem, os homens fazem propostas às mulheres de que mais gostam, escolhendo a primeira

mulher em sua lista de preferência com cada uma de suas "vagas". Desse modo, suas vagas, por serem consideradas como pessoas distintas, irão todas propor à mesma mulher, a qual escolhe sempre a primeira opção como uma possível escolha artificial (já discutida no problema de indiferenças) dentre as que são equivalentes.

1ª Rodada – propostas e escolhas

Olhando as preferências dos homens em suas listas e a consequente escolha das mulheres quanto às propostas que recebem, temos que X_1, X_2 e X_3 propõem a Débora, que não os aceita; Y_1 e Y_2 propõem a Carolina, que seleciona Y_1 e rejeita Y_2, escolhendo, das duas vagas equivalentes, apenas uma. Assim, a execução desse processo nada difere das anteriores.

$X_1: \hat{D} > F > C > B > A > G > E$ $\quad A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$X_2: \hat{D} > F > C > B > A > G > E$ $\quad B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$X_3: \hat{D} > F > C > B > A > G > E$ $\quad C: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2$
$Y_1: \boxed{C} > D > B > G > E > A > F$ $\quad D: Y_1 \equiv Y_2$
$Y_2: \hat{C} > D > B > G > E > A > F$ $\quad E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$F: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

Como os homens têm algumas de suas "vagas" rejeitadas, novas propostas são feitas de modo que se modifique as tabelas:

2ª Rodada – propostas e escolhas

$Y_2 \rightsquigarrow D$ $\quad \therefore D: Y_2$
$X_1, X_2, X_3 \rightsquigarrow F$ $\quad \therefore F: X_1$
$Y_1 \rightsquigarrow C$ $\quad \therefore C: Y_1$

Com as novas propostas, obtemos:

$$X_1 : \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_2 : \hat{D} > \hat{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_3 : \hat{D} > \hat{F} > C > B > A > G > E$$
$$Y_1 : \boxed{C} > D > B > G > E > A > F$$
$$Y_2 : \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$$

$$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$C: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2$$
$$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$$
$$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$

Como ainda há rejeições, no caso de X_2 e X_3, ocorre uma terceira rodada:

3ª Rodada – propostas e escolhas

$$X_1 : \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_2 : \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$$
$$X_3 : \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > B > A > G > E$$
$$Y_1 : \hat{C} > D > B > G > E > A > F$$
$$Y_2 : \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$$

$$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$$
$$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$

É importante destacar que, como as listas de preferência de cada "vaga" de um mesmo homem têm a mesma ordenação das mulheres, as propostas a uma mesma mulher serão frequentes. Quando a vaga faz uma proposta, a mulher escolhida já pode estar alocada com outra vaga do mesmo homem, o que resulta na permanência da vaga original, segundo nosso critério de não trocar equivalentes. Exemplo disso é que Débora rejeitará Y_1 porque já está alocada com Y_2:

4ª Rodada – propostas e escolhas

$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$

$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$

$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$

$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > B > G > E > A > F$

$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$

$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$

$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$

$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$

$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

5ª Rodada – propostas e escolhas

$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$

$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$

$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$

$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > G > E > A > F$

$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$

$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$

$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$

$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$

$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

6ª Rodada – propostas e escolhas

$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$

$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$

$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$

$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > \hat{G} > E > A > F$

$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$

$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$

$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$

$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$

$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$

$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

7ª Rodada – propostas e escolhas

$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$
$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$
$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$
$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > \hat{G} > \boxed{E} > A > F$
$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$

$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$
$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$
$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2$
$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$
$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

Segundo a tabela, Xavier consegue então se unir a Beatriz, Carolina e Flávia, enquanto Yuri se estabelece com Débora e Érica. Consequentemente, por não haver mais "vagas" disponíveis, Ana é forçada a ficar solteira, ao passo que Glória fica solteira por escolha própria, por preferir isso a ser pareada com Yuri.

A partir desses resultados, percebemos que não há nenhuma ocorrência de instabilidade, mesmo quando expandimos esse algoritmo a situações em que o emparelhamento ocorre entre mais do que um indivíduo com um outro. Isso porque, ao repetirmos as listas de preferências, ao invés de modificarmos o algoritmo, transformamos os polígamos Xavier e Yuri em X_1, X_2, X_3, Y_1 e Y_2, de modo que utilizamos nessa resolução tanto a repetição da lista dos polígamos como o algoritmo Gale-Shapley.

Note que outros conjuntos de listas de preferência podem resultar em agentes polígamos sem preencher todas as suas "vagas".

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo, agora do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, às mesmas listas de preferência, reproduzidas a seguir:

Ana: $Y > X$
Beatriz: $X > Y$
Carolina: $X > Y$
Débora: Y
Érica: $X > Y$
Flávia: $Y > X$
Glória: X

Xavier (3 vagas): $D > F > C > B > A > G > E$
Yuri (2 vagas): $C > D > B > G > E > A > F$

Resposta: Novamente obtemos $X - \{B, C, F\}$ e $Y - \{D, E\}$, enquanto Ana é forçada a ficar solteira e Glória o faz por opção (Yuri a preferiria a Érica).

2) Aplique o algoritmo, uma vez para propostas feitas pelos homens, outra pelas mulheres, às listas de preferência abaixo, verificando quais mulheres ficam solteiras e se de forma forçada (rejeitadas por todos os homens) ou não:

R (3 vagas): $D > A > F > G > C > E > B > H$
S (1 vaga): $G > B > C > A > F > D > E > H$
T (2 vagas): $G > E > A > F > C > D > B > H$

A: $T > S > R$
B: $S > R > T$
C: $R > T > S$
D: $T > S$
E: $R > S > T$
F: $S > T > R$
G: $T > R$
H: R

Resultado: Com os homens propondo, obtemos $R - \{A, C, F\}$, $S - B$ e $T - \{E, G\}$, enquanto D fica solteira por opção e H porque ninguém lhe propõe. Com as mulheres propondo, a situação das solteiras é a mesma, porém, $R - \{C, E, F\}$, $S - B$ e $T - \{A, G\}$.

Solução sem multiplicações

O procedimento descrito acima para tratar a poligamia é muito ineficiente, ao fazer várias vagas atuarem como pessoas e proporem repetidamente a um mesmo indivíduo, mesmo quando este já rejeitou uma vaga semelhante ou está alocado a outra vaga semelhante.

Podemos, tanto nestes exemplos pequenos como na prática computacional, trabalhar com as listas originais e manter, também, registros dos totais de vagas para cada agente e as respectivas quantidades de vagas ainda disponíveis ou não preenchidas. Com esse formato, mantemos, para cada "carteira", uma listagem temporária de "associados" e, quando completa, substituímos os associados menos preferidos por aqueles que estão ingressando.

Por exemplo, suponha que X tenha três vagas, todas preenchidas pelos associados $B > A > C$. Suponha, também, que X é um agente

seletor, que recebe propostas. Ele somente aceitará uma proposta de D caso $D > C$; depois da substituição, a listagem temporária será ordenada novamente segundo as preferências de X, podendo ser $B > D > A$, por exemplo, e deixando A em situação de potencial substituição. Por outro lado, na situação de ser X quem faz propostas, ele somente proporá a algum agente quando A, B ou C abandonarem-no em prol de outra oferta mais interessante e, em caso de aceitação, preencherá a vaga aberta.

No caso de um número arbitrário de vagas abrindo-se, portanto, tomamos em conjunto os "associados" e as novas propostas, selecionamos os candidatos mais preferidos, dentre todos, e rejeitamos os demais que excederem o número de vagas disponíveis.

Novamente, o processo termina quando cada agente proponente estiver alocado ou houver sido rejeitado por cada agente seletor.

O resultado final será o mesmo que obtivemos com o procedimento exemplificado. Trataremos assim um pequeno exemplo na Seção 5.1.

2.4 Recapitulação

Buscamos explicar e exemplificar o algoritmo Gale-Shapley para obter emparelhamentos estáveis de casais e indicar sua adaptabilidade mesmo a situações com falta de preferência, números desiguais de indivíduos a serem pareados, listas incompletas e uniões de um único agente com vários outros.

Isso foi possível contando com algumas estratégias comuns em raciocínio lógico, como a utilização de curingas e repetição de listas, permitindo aplicar novamente o *mesmo* procedimento, realizando a *redução* desses problemas mais complexos à primeira versão mais simples que estudamos.

Importante: Reflita e constate que essa solução também pode ser aplicada em situações ainda mais complexas, em que ocorram todos os problemas supracitados simultaneamente.

Adotamos a figura do casamento para explicar os exemplos tradicionais, mas, nos próximos capítulos, veremos que o algoritmo é considerado tanto na academia como no mundo real cotidiano, nas questões de admissão de alunos nas universidades e escolas e de emparelhamento de colegas de quarto.

3

Resolução por programação linear

A primeira investigação geral do problema do casamento foi a teoria de Gale; Shapley (1962), isto é, o algoritmo de *deferred acceptance*, seguida de seu desenvolvimento pelos trabalhos dos próprios David Gale e Lloyd Shapley e, também, Alvin Roth, Marilda Sotomayor e outros pesquisadores.

Entretanto, a própria execução uma a uma das rodadas de propostas, descrita no capítulo anterior, não foi a única solução encontrada. Sendo assim, outro método de resolução, interessante para nossa discussão, é a formulação desse problema na forma de otimização linear.

Nossa apresentação será baseada no trabalho de John Vande Vate – como exposto em Gusfield; Irving (1989), mas, para tanto, faremos uma introdução breve à programação linear, sobre a qual o leitor encontrará maiores detalhes em Lins; Calôba (2006) e Brown; Sherbert (1984).

3.1 Programação linear

O exercício 37 de Brown; Sherbert (1984, p. 118) requer fazer e vender bolos, tortas e dúzias de biscoito de acordo com a seguinte proporção de ingredientes:

ingrediente \ produto	bolo	torta	dúzia de biscoitos
maçãs	3	10	1
xícaras de açúcar	1	2	3
xícaras de farinha	2	3	1

Para isso, temos à disposição 840 maçãs, 630 xícaras de açúcar e 450 xícaras de farinha.

Por outro lado, os bolos são vendidos por R$ 8, as tortas por R$ 6 e os pacotes de uma dúzia de biscoitos por R$ 5. De modo a melhor utilizar os ingredientes, desejamos maximizar o valor das vendas, o que significa que desejamos maximizar a *função objetivo* $V = 8x + 6y + 5z$, sendo:

x = número de bolos;
y = número de tortas;
z = número de dúzias de biscoitos.

Observação: O valor total das vendas é a soma das quantidades vendidas multiplicadas pelos respectivos valores unitários. (Note que, se tivéssemos os custos unitários dos ingredientes, poderíamos calcular o custo total e subtraí-lo do valor das vendas, para tentar maximizar apenas o lucro líquido.)

Essa função V está definida em um domínio, isto é, uma região do espaço tridimensional $Oxyz$ delimitada pelas seguintes inequações, devido ao fato de que, para produzirmos tais alimentos, estamos sujeitos às quantidades disponíveis dos ingredientes:

$$3x + 10y + 1z \leq 840$$
$$1x + 2y + 3z \leq 630$$
$$2x + 3y + 1z \leq 450$$

e, por uma questão de lógica,

$$x, y, z \geq 0.$$

A partir dessas equações, montamos uma matriz chamada "*tableau*", que explicamos a seguir:

1	– 8	– 6	– 5	0	0	0	0
0	3	10	1	1	0	0	840
0	1	2	3	0	1	0	630
0	2	3	1	0	0	1	450

A 1ª coluna é fixa; as 2ª, 3ª e 4ª colunas correspondem às proporções de uso dos ingredientes disponíveis em cada produto, respectivamente, bolos, tortas e dúzias de biscoito; as 5ª, 6ª e 7ª colunas correspondem às possíveis sobras de maçãs, açúcar e farinha, ou seja, são as quantidades adicionais (também consideradas como variáveis) necessárias para transformar as desigualdades em equações; a 8ª coluna considera o total de ingredientes disponíveis. Dessa forma, na 1ª linha, os valores se referem à *função objetivo*, mas com os sinais trocados porque, de fato, $V - 8x - 6y - 5z = 0$, enquanto que a 2ª linha é uma relação das informações sobre as maçãs; a 3ª com as informações sobre o açúcar e a 4ª com as informações sobre a farinha.

As variáveis que identificam as sobras dos ingredientes adquirem nomes variados na literatura, como "variáveis de folga" ou *slack variables*.

Uma vez montado o *tableau*, utilizamos o algoritmo *Simplex* para resolução do problema. É preciso notar que tanto o *tableau* que montamos como a descrição das etapas do *Simplex* são específicas a esse tipo de problema. Outras questões de otimização linear são resolvidas de modo diferente.

1º passo: Procurar pela entrada "mais negativa" na primeira linha e selecioná-la; chamamos sua coluna de "coluna pivô". Notamos que o número – 8 é a entrada mais negativa, por isso sua coluna será a "coluna pivô":

1	– 8	– 6	– 5	0	0	0	0
0	3	10	1	1	0	0	840
0	1	2	3	0	1	0	630
0	2	3	1	0	0	1	450

2º passo: Em separado, dividir as entradas da última coluna pelas entradas positivas da "coluna pivô" e procurar o menor quociente. Assim:

$$840 \div 3 = 280$$
$$630 \div 1 = 630$$
$$\boxed{450 \div 2 = 225}$$

A linha do menor quociente obtido é, então, identificada como "linha pivô", sendo que a célula de interseção desta linha com a "coluna pivô" será chamada de *pivô*. Notamos que o quociente 225 é o menor, de forma que, sendo ele o quociente de 450 por 2, a última linha será a "linha pivô", assim como o número 2 é o pivô ao estar na célula em que a "coluna pivô" é interceptada pela "linha pivô":

1	– 8	– 6	–5	0	0	0	0
0	3	10	1	1	0	0	840
0	1	2	3	0	1	0	630
0	2	3	1	0	0	1	450

3º passo: Em seguida, dividimos a linha pelo valor do pivô e usamos as operações de escalonamento para zerar o restante da coluna. Isto é, na 1ª linha, somamos a ela a multiplicação da nova 4ª linha por 8; na 2ª linha, subtraímos dela a multiplicação da nova 4ª linha por 3, enquanto que, na 3ª linha, somente subtraímos dela a nova 4ª linha:

1	0	6	–1	0	0	4	1800
0	0	5,5	–0,5	1	0	–1,5	165
0	0	0,5	2,5	0	1	–0,5	405
0	1	1,5	0,5	0	0	0,5	225

Esses passos são repetidos até que não haja mais entradas negativas na primeira linha. No caso deste exemplo, ainda há uma entrada negativa – 1, localizada na 4ª coluna (nova "coluna pivô"). Então procuramos a nova "linha pivô", dividindo os valores da última coluna pelos positivos da nova "coluna pivô":

$$405 \div 2{,}5 = 162$$
$$225 \div 0{,}5 = 450$$

Como o menor quociente é 162, notamos que o novo pivô é 2,5.

1	0	6	–1	0	0	4	1800
0	0	5,5	–0,5	1	0	–1,5	165
0	0	0,5	2,5	0	1	–0,5	405
0	1	1,5	0,5	0	0	0,5	225

Dessa forma, o próximo passo é dividir a nova "linha pivô" pelo valor do pivô 2,5 e, utilizando escalonamento, zerar os demais valores dessa coluna. Assim, na 1ª linha, somamos a nova 3ª linha; na 2ª linha, somamos o quociente da nova 3ª linha por 2, enquanto que, na 4ª linha, subtraímos o quociente da nova 3ª linha por 2. Temos, então:

1	0	6,2	0	0	0,4	3,8	1962
0	0	5,6	0	1	0,2	–1,6	246
0	0	0,2	1	0	0,4	–0,2	162
0	1	1,4	0	0	–0,2	0,6	144

Com base neste último *tableau*, como não temos mais entradas negativas na primeira linha, chegamos à tabela final. Sua interpretação é a seguinte: sua última coluna contém o valor máximo de V e os valores das variáveis x, y, z, identificadas a partir das colunas que formam a matriz identidade, sendo que as demais variáveis são nulas.

Neste exemplo, descobrimos que, ao maximizar as vendas, ganhamos R$ 1962 (brutos). Para isso, fazemos e vendemos 144 bolos: percebemos que na 2ª coluna, dos bolos, ocorre somente uma única vez o número 1; a interseção de sua linha com a última coluna determina a quantidade de bolos feitos. Também fazemos e vendemos 162 dúzias de biscoito: percebemos que, na 4ª coluna dos biscoitos, ocorre somente uma única vez o número 1; a interseção de sua linha com a última coluna determina a quantidade de dúzias de biscoito feitas.

Entretanto, não fazemos nenhuma torta, dado que sua coluna (3ª coluna) não é composta por zeros e um único 1. Contudo, a 5ª coluna, das sobras de maçãs, tem esse formato. Consequentemente, a interseção da linha restante (2ª linha) com a última coluna determina o saldo de 246 maçãs, isto é, que sobraram.

Como funciona e quando não funciona

O algoritmo *Simplex* é só quinze anos mais velho que o de Gale-Shapley e tem sido estudado profusamente. Faremos somente um resumo de considerações sobre seu funcionamento, mas, para entender melhor o mecanismo, veja textos especializados como Lins; Calôba (2006, caps. 4 e 5). (Cumpre notar que textos diferentes se servem de formulações diversas em que o processo é análogo, mas não idêntico. Por exemplo, Lins e Calôba preferem a linha da função objetivo como última no *tableau*. Autores que buscam *minimizar* a função objetivo podem formulá-la inversamente e usar entradas *positivas* para determinar a "coluna pivô".)

Note, no exemplo, que cada *tableau* (seja o inicial ou após uma rodada completa dos três passos) também pode ser interpretado como fizemos com o último; obtemos, respectivamente:

- 0 bolos, 0 tortas e 0 dúzias de biscoitos, restando 840 maçãs, 630 xícaras de açúcar e 450 xícaras de farinha.
- 225 bolos, 0 tortas e 0 dúzias de biscoitos, restando 165 maçãs, 405 xícaras de açúcar e 0 xícaras de farinha. (Confira que esses bolos são feitos precisamente com os ingredientes subtraídos das quantidades originais.)

- 144 bolos, 0 tortas e 162 dúzias de biscoitos, restando 246 maçãs, 0 xícaras de açúcar e 0 xícaras de farinha. (Desistimos de fazer tantos bolos, consumindo menos maçãs e mais açúcar para fazer biscoito.)

Por outro lado, ao delimitarmos a região do espaço tridimensional *Oxyz* pelas inequações lineares do problema, obtemos um poliedro convexo (sólido com faces e arestas planas e sem concavidade) do qual os pontos (0,0,0), (225,0,0) e (144,0,162) são alguns dos vértices.

Para entendermos a relevância dos vértices, note, primeiramente, que $V = 8x + 6y + 5z$ está definida em todo o espaço *Oxyz;* no cálculo básico universitário, mostra-se que V cresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor (8,6,5), chamado ∇V ("gradiente de V"). Podemos imaginar, então, uma pequena bolinha presa dentro do poliedro delimitado pelas restrições do problema linear, mas sobre a qual atua uma força identificada com esse vetor. Assim como se sujeita à força gravitacional, a bolinha tenderia a ir para o ponto mais baixo de um recipiente; naquela situação, ela também tende a deslocar-se para os "últimos" pontos do poliedro, em que o valor de V seja o mais alto. E, assim como no caso do recipiente, cujo fundo pode ser chato ou em forma de uma cunha, esses pontos podem constituir toda uma face ou uma aresta do poliedro, mas, forçosamente, incluem um vértice.

O *Simplex* foi elaborado, portanto, para procurar o ponto de otimização entre os vértices. Em cada *tableau*, o algoritmo apresentou-nos um desses vértices e, em sequência, foi ao próximo vértice enquanto o valor da função objetivo V progressivamente aumentou. De fato, na primeira linha, ao eliminarmos as entradas negativas, a última entrada em geral aumenta e nunca diminui (às vezes, pode não aumentar, caso em que o pivô sendo trabalhado é chamado *degenerado*). Como essa linha corresponde à equação formada pela definição de V, sua última entrada é o valor correspondente de V nesse momento.

(A escolha da entrada "mais negativa" na primeira linha busca aumentar o valor de V o mais rápido possível em uma pivotagem,

embora isso não aconteça necessariamente e outras técnicas possam ser usadas.)

Nesse ínterim, a escolha do menor quociente positivo mantém a última coluna não negativa, subtraindo de cada entrada original um valor menor (nas linhas com quociente positivo) ou somando propriamente (nas linhas com quociente negativo, como a da função objetivo). Isso preserva a factibilidade das variáveis em estudo. Se remontarmos o sistema a partir do *tableau*, veremos que quaisquer outros valores não negativos para as variáveis acabarão por subtrair algo de V, de modo que o valor obtido realmente é máximo.

Porém, duas possibilidades podem atrapalhar a execução do *Simplex:* não encontrarmos um pivô, ou encontrarmos o mesmo *tableau* duas vezes.

O primeiro caso é quando uma coluna pivô não tem entradas positivas. Nesse caso, é possível mostrar que a variável correspondente a essa coluna fica livre, ou seja, pode ter um valor positivo arbitrário; então, o poliedro definido pelas inequações é um sólido ilimitado e, portanto, a função V também é ilimitada.

No segundo caso, o valor de V não aumentou entre as duas repetições do mesmo *tableau* (afinal, esse valor é parte do *tableau*) e os pivôs envolvidos são todos degenerados. Há casos em que não há outra escolha de pivôs e o método falha.

3.2 Programação linear pelo Excel

O procedimento de otimização linear nem sempre é factível manualmente, dado que, em geral, seus problemas já envolvem uma quantidade muito grande de equações dentro do sistema, como é o caso dos problemas de alocação aqui descritos. Por exemplo, um pequeno problema de casamento com somente 6 pessoas (3 casais) já envolverá 15 inequações. Dessa forma, é interessante utilizar ferramentas que agilizem a resolução do sistema linear.

Portanto, incluímos, aqui, um exemplo de resolução de sistemas lineares por meio de planilhas eletrônicas. A título de exemplo,

trabalharemos o problema anterior de programação linear, em que tivemos que produzir bolos, tortas e biscoitos de modo a maximizar sua receita bruta.

O primeiro passo é montar a tabela com todos os dados e cálculos necessários na planilha. Para facilitar, criamos um "cabeçalho" nas 1ª e 2ª linhas, em que deixamos a 1ª célula vazia (as células que não serão preenchidas mostraremos em cinza nas figuras) e, na 2ª célula, inserimos "coeficiente de *x*" ou "coef. *x*" (que determina a quantidade do produto "bolo" a ser produzida, como determinamos na Seção 3.1), seguido de "coeficiente de *y*" ou "coef. *y*" (que determina a quantidade do produto "torta" a ser produzida) na célula seguinte e, depois, de "coeficiente de *z*" ou "coef. *z*" (que determina a quantidade de "dúzias de biscoito" a ser produzida). Mantemos as próximas duas células vazias, para, então, na seguinte (7ª célula), inserirmos "total utilizado" ou "tot. utilizado" e, na subsequente (8ª célula), "total disponível" ou "tot. disponível".

	A	B	C	D	E	F	G	H
1-2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível

Uma vez feito o "cabeçalho", inserimos a *função objetivo* $V = 8x + 6y + 5z$ na 3ª linha da tabela, ou seja, em sua 1ª célula inserimos "objetivo" para identificarmos a qual função estamos fazendo referência. Em seguida, incluímos os valores que constituem os coeficientes, de forma que, na 2ª célula, inserimos o número 8, na 3ª célula o número 6 e, na 4ª célula, o número 5, sem trocar o sinal.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1-2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível
3	objetivo	8	6	5				

Após a elaboração destas duas primeiras linhas, pulamos uma linha e começamos a preencher o restante da planilha. Assim, na coluna *A*, iniciamos com a inserção do nome do primeiro ingrediente na 5ª linha, "Maçãs"; na 6ª linha, inserimos o nome do segundo

ingrediente, “Açúcar”, e, na 7ª linha, o nome do terceiro ingrediente, “Farinha”.

Ao passo que, na coluna *B*, inserimos a quantidade de cada ingrediente para a fabricação de bolo, ou seja, em sua 5ª linha inserimos a quantidade necessária de 3 maçãs para a produção de um bolo, enquanto que na 6ª linha inserimos a quantidade também necessária de 1 xícara de açúcar para se produzir um bolo e na 7ª linha inserimos a quantidade necessária de 2 xícaras de farinha à produção de um bolo.

Consequentemente, na coluna *C* inserimos as respectivas quantidades de maçãs, xícaras de açúcar e xícaras de farinha para a produção de uma torta, assim como na coluna *D* inserimos as respectivas quantidades de maçãs, xícaras de açúcar e xícaras de farinha para a produção de uma dúzia de biscoito. Dessa forma, temos:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1–2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível
3	objetivo	8	6	5				
4								
5	Maçãs	3	10	1				
6	Açúcar	1	2	3				
7	Farinha	2	3	1				

Em seguida, pulamos as colunas *E, F* e *G* e completamos a coluna “tot. disponível” (coluna *H*) com os valores determinados pelas inequações da Seção 3.1, ou seja, a partir da 5ª linha da coluna *H* inserimos a quantidade total de 840 maçãs que possuímos, assim como na 6ª linha a quantidade total de 630 xícaras de açúcar e, na 7ª linha, a quantidade total de 450 xícaras de farinha à disposição.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1–2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível
3	objetivo	8	6	5				
4								
5	Maçãs	3	10	1				840
6	Açúcar	1	2	3				630
7	Farinha	2	3	1				450

Agora, pulamos a 8ª linha e, na linha seguinte (9ª linha), inserimos "x =" na coluna B, ao passo que inserimos "y =" na coluna C e "z =" na coluna D. As células abaixo desses elementos, na 10ª linha, são o local onde serão apresentados os valores de cada um desses coeficientes em sua forma mais eficiente, isto é, para se alcançar a maximização da receita bruta. Os valores nestas células irão variar com a execução do *Solver*, porém, é preciso completar a planilha para iniciar o processo. Para tanto, inserimos o número 1 nestas células.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot.	tot.
2							utilizado	disponível
3	objetivo	8	6	5				
4								
5	Maçãs	3	10	1				840
6	Açúcar	1	2	3				630
7	Farinha	2	3	1				450
8								
9		x =	y =	z =				
10		1	1	1				

Depois, incluímos as fórmulas para o cálculo da otimização na coluna G: na 3ª linha dessa coluna inserimos a fórmula $= B3 * B10 + C3 * C10 + D3 * D10$ que realiza a multiplicação dos números contidos nas células $B3$, $C3$ e $D3$ com os números correspondentes contidos nas células $B10$, $C10$ e $D10$ e, depois, somados entre si. Depois, na 5ª linha, inserimos a fórmula $= B5 * B10 + C5 * C10 + D5 * D10$, que determina a quantidade de maçãs usada na fabricação de bolos, tortas e dúzias de biscoito. Assim, fazemos o mesmo nas linhas seguintes, de forma que na 6ª, seja inserida a fórmula $= B6 * B10 + C6 * C10 + D6 * D10$ para a quantidade de xícaras de açúcar e, na 7ª, a fórmula $= B7 * B10 + C7 * C10 + D7 * D10$ para a quantidade de xícaras de farinha.

O leitor com prática no Excel experimentará selecionar a célula $G5$, clicar no quadrado que aparece no seu canto inferior direito e "arrastar" para as demais células para completamento automático; contudo, é preciso cuidado e verificar que os índices

10 serão indevidamente também modificados. Um jeito de resolver isso é através do uso do cifrão $ ao escrever a fórmula em $G5$: esse símbolo fixa a identificação da linha ou coluna que o seguir, por exemplo, em $B\$10$ ou $\$B\$10$, quando copiamos para todo um grupo de células. Porém, no exemplo de emparelhamento, veremos como realizar todas as somas com uma única operação matricial.

Por conseguinte, as fórmulas determinam o valor 19 na célula $G3$, 14 na célula $G5$ e 6 nas células $G6$ e $G7$ (enquanto o *Solver* ainda não foi executado).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1–2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível
3	objetivo	8	6	5			19	
4								
5	Maçãs	3	10	1			14	840
6	Açúcar	1	2	3			6	630
7	Farinha	2	3	1			6	450
8								
9		x =	y =	z =				
10		1	1	1				

O passo seguinte é utilizar a ferramenta *Solver* do programa Excel, que pode ser encontrada na aba "Ferramentas" ou na aba "Dados", juntamente com outras ferramentas de análise.

Se for necessário instalá-lo, vá ao menu principal do Excel, item "Ferramentas" ou "Opções", subitem "Add-ins" ou "Suplementos", procure por "solver" e proceda com as instruções na tela. Essa operação pode não funcionar, informando que o arquivo "solver.xlam" não está presente. Nesse caso, rode a reinstalação do Office para incluir o item "Ferramentas Compartilhadas do Office", subitem "Aplicação Básica Visual" e refaça a operação.

Uma vez disponível e selecionado o *Solver*, acompanhe o preenchimento de seu "quadro de diálogo" na próxima figura.

O primeiro passo é determinar a "Célula de Destino", isto é, a célula que acumula o valor calculado da *função objetivo*, que, neste caso, é a célula $G3$, cuja fórmula soma os produtos dos coeficientes de x, y e z pelos valores dessas variáveis. Para selecioná-la,

podemos clicar no botão disponível à direita do campo de preenchimento; o quadro de diálogo será substituído por outro, menor, que o usuário pode ignorar e optar por selecionar a célula desejada diretamente na própria planilha; de imediato, o quadro de diálogo será restaurado com o campo preenchido. (Estes cifrões serão inseridos pelo próprio programa para fixar a identificação das células.)

Em seguida, como desejamos maximizar a renda bruta, selecionamos a opção "Máx.". As "Células Variáveis" serão as células $B10$, $C10$ e $D10$ que identificam os valores dos coeficientes que irão mudar de acordo com a execução do *Solver*; elas também podem ser selecionadas, como um intervalo de células, com o uso do botão à direita do campo.

Por fim, inserimos as restrições no quadro de diálogo, de modo que, por uma questão de lógica, os valores de $B10$, $C10$ e $D10$ devem ser maiores ou iguais a zero e os valores de $G5$, $G6$ e $G7$ ser menores ou iguais aos valores de $H5$, $H6$ e $H7$, respectivamente. Podemos tratar as duas situações do mesmo modo, mas, também, selecionar, especificamente, a opção que aparece mais abaixo, "Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas", para tratar o primeiro conjunto de condições, que é muito comum. Para as outras restrições, clicamos o botão "Adicionar" e selecionamos os intervalos de células no novo quadro de diálogo, assim como a relação de desigualdade entre eles.

Uma vez incluídos os elementos de análise, selecionamos "LP Simplex" como modelo de solução e, então, clicamos em "Resolver". Em vista disso, o *Solver* começa a ser executado e, se ele encontrar uma solução, automaticamente substituirá os valores na tabela por novos, os quais maximizam a receita bruta. Logo, temos a seguinte tabela reformulada pelo *Solver*:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1–2		coef. X	coef. Y	coef. Z			tot. utilizado	tot. disponível
3	objetivo	8	6	5			1962	
4								
5	Maçãs	3	10	1			594	840
6	Açúcar	1	2	3			630	630
7	Farinha	2	3	1			450	450
8								
9		x =	y =	z =				
10		144	0	162				

Isso significa que o valor da função objetivo é de R$ 1962 (brutos), devido aos 144 bolos (na célula $B10$) e 162 dúzias de biscoitos (na célula $D10$) produzidos. Entretanto, não fazemos nenhuma torta, dado que a célula $C10$ está zerada.

Além disso, podemos notar que todas as quantidades de xícaras de açúcar e de xícaras de farinha disponíveis foram utilizadas, ao passo que somente 594 maçãs foram utilizadas, o que resulta num saldo de 246 maçãs.

Portanto, se voltarmos à primeira seção, verificaremos que os resultados obtidos pela programação linear no Excel coincidem

com a resolução manual do sistema. Dessa forma, utilizaremos essa técnica para a resolução de problemas do casamento.

3.3 Otimização linear no problema do casamento

Para que o problema do casamento possa ser resolvido pela programação linear, devemos, primeiramente, expressá-lo em um sistema de equações e inequações lineares. Para isso, os primeiros elementos a serem considerados são o número de pessoas no problema, o que determina a quantidade de equações necessárias, e se ocorre ou não a formação de um casal entre um homem H e uma mulher M.

↪**Definição e notação:** Para denotar o pareamento entre H e M, utilizaremos a *variável booleana* X_{HM} ou $X(H,M)$, que pode assumir somente dois valores: 0 (falso) quando H e M não estão casados ou 1 (verdadeiro) quando $H – M$. Note que sempre temos $X(H,M) \geq 0$.

Demonstramos o processo de alocação estável de casais a seguir, com um exemplo, utilizando o Excel com o *Solver*. A título de exemplo, tomamos o universo de 5 homens e 5 mulheres, sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Ana (A); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E).

As pessoas de ambos os grupos continuam a listar as pessoas do grupo oposto segundo uma ordem de preferência; utilizamos, aqui, as mesmas listas de preferências que em nosso primeiro exemplo, na Seção 1.2:

Victor:	$A > C > D > E > B$	Ana:	$Z > W > V > Y > X$
Wilson:	$A > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$
Xavier:	$D > C > B > A > E$	Carolina:	$Z > W > V > X > Y$
Yuri:	$A > D > B > E > C$	Débora:	$V > W > Y > X > Z$
Zé:	$C > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$

Com o intuito de montar as equações, notaremos que, de acordo com o número $2n$ de agentes envolvidos no problema (10 pessoas, 5 de cada grupo), são necessárias $2n + n^2$ equações. Ao substituirmos n por 5 descobrimos o número total de 35 equações para este problema.

Destas 35 equações, as 10 primeiras equações dirão respeito a cada um dos indivíduos, em que se determinam todos os possíveis pares que ele pode fazer com as pessoas do grupo oposto. As demais 25 equações dirão respeito às preferências dos parceiros sob cada possível emparelhamento.

Lembre que:

$$X_{HM} = \begin{cases} 1 & \text{se } H - M \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

Dessa forma, montamos, primeiramente, as equações de cada indivíduo de um dos grupos, como dos homens, em que cada homem tem uma equação que soma todos os pares que ele forma com cada uma das mulheres do problema. Além disso, essas equações devem ser igualadas a 1, pois temos a certeza de que existe a possibilidade de formação de algum desses pares, isto é, para cada agente algum par pode ser formado e deverá ser único. Assim:

- Para cada homem H, temos a equação $\sum_M X(H, M) = 1$.
- Para cada mulher M, temos a equação $\sum_H X(H, M) = 1$.

↪**Justificativa:** Como cada variável X_{HM} só pode valer 0 ou 1, a soma de todas as variáveis para cada agente deve igualar 1, o que garante que, dessas variáveis, somente uma valha 1 (correspondendo ao casamento realizado) e as outras valham 0 (casamentos não realizados).

Por exemplo, a equação de Victor deve conter os potenciais pares dele com Ana (*VA*), Beatriz (*VB*), Carolina (*VC*), Débora (*VD*), e Érica (*VE*),com sua soma igualada a 1:

$$\text{Victor: } X_{VA} + X_{VB} + X_{VC} + X_{VD} + X_{VE} = 1$$

Depois, fazemos o mesmo procedimento com o outro grupo, das mulheres. Por exemplo, a equação de Ana deve conter seus pares com Victor (*VA*), Wilson (*WA*), Xavier (*XA*), Yuri (*YA*), e Zé (*ZA*) com soma igual a 1:

$$\text{Ana: } X_{VA} + X_{WA} + X_{XA} + X_{YA} + X_{ZA} = 1$$

Assim, ao final, temos as seguintes equações de cada pessoa:

Victor:	$X_{VA} + X_{VB} + X_{VC} + X_{VD} + X_{VE}$	$= 1$
Wilson:	$X_{WA} + X_{WB} + X_{WC} + X_{WD} + X_{WE}$	$= 1$
Xavier:	$X_{XA} + X_{XB} + X_{XC} + X_{XD} + X_{XE}$	$= 1$
Yuri:	$X_{YA} + X_{YB} + X_{YC} + X_{YD} + X_{YE}$	$= 1$
Zé:	$X_{ZA} + X_{ZB} + X_{ZC} + X_{ZD} + X_{ZE}$	$= 1$
Ana:	$X_{VA} + X_{WA} + X_{XA} + X_{YA} + X_{ZA}$	$= 1$
Beatriz:	$X_{VB} + X_{WB} + X_{XB} + X_{YB} + X_{ZB}$	$= 1$
Carolina:	$X_{VC} + X_{WC} + X_{XC} + X_{YC} + X_{ZC}$	$= 1$
Débora:	$X_{VD} + X_{WD} + X_{XD} + X_{YD} + X_{ZD}$	$= 1$
Érica:	$X_{VE} + X_{WE} + X_{XE} + X_{YE} + X_{ZE}$	$= 1$

Em seguida, montamos um outro tipo de equações (as 25 restantes), mais propriamente desigualdades, em que contemplamos cada possível par entre homens e mulheres. Para formação desse segundo tipo de equações, primeiro somamos os pares que a mulher da equação acredita serem *piores* do que o parceiro emparelhado com ela (isto é, os pares com homens que estão depois de seu par em sua lista de preferência). Depois, subtraímos os pares que o homem da equação *prefere* à sua parceira (ou seja, os pares com as mulheres mais preferíveis que sua parceira em sua lista de preferência). Ou seja, para o par (*H, M*), temos:

$$\sum_{H' <_M H} X(H', M) - \sum_{M' >_H M} X(H, M') \leq 0$$

➥**Justificativa:** Essa desigualdade é montada de modo, que o par (*H, M*) não possa ser um par de bloqueio. De fato, se *H* e *M* forem casados, ambas as somas são nulas. Caso contrário, como cada soma vale 0 ou 1, se *M* estiver pareada a um homem *H'* que considere inferior a *H* (a soma esquerda é 1), então *H* deverá estar pareado a uma mulher *M'* que considere superior a *M* (a soma direita será 1); por outro lado, se *H* estiver pareado a uma mulher que considere inferior a *M* (a soma direita é 0), então *M* deverá estar pareada a um homem que considere superior a *H* (a soma esquerda será 0).

Dessa forma, primeiro selecionamos um homem e uma mulher para, então, montar uma equação para este par. Por exemplo, notamos que o par Victor e Ana tem a seguinte equação: Ana considera Yuri e Xavier como menos preferíveis que Victor, enquanto que, na segunda parte, Victor considera que não há ninguém mais preferível que Ana. Ou seja:

$$VA: (X_{YA} + X_{XA}) - (0) \leq 0$$

Continuamos a montar as equações de cada par. A fim de facilitar, montamos primeiro todos os possíveis pares de Victor, isto é, Victor e Ana; Victor e Beatriz; Victor e Carolina; Victor e Débora; Victor e Érica:

$$\begin{array}{lll}
VA: & (X_{YA} + X_{XA}) - (0) & \leq 0 \\
VB: & (X_{XB} + X_{YB} + X_{ZB} + X_{WB}) - (X_{VA} + X_{VC} + X_{VD} + X_{VE}) & \leq 0 \\
VC: & (X_{XC} + X_{YC}) - (X_{VA}) & \leq 0 \\
VD: & (X_{WD} + X_{YD} + X_{XD} + X_{ZD}) - (X_{VA} + X_{VC}) & \leq 0 \\
VE: & (0) - (X_{VA} + X_{VC} + X_{VD}) & \leq 0
\end{array}$$

Em seguida, todos os possíveis pares de que Wilson pode fazer parte, isto é, Wilson e Ana; Wilson e Beatriz; Wilson e Carolina; Wilson e Débora e Wilson e Érica:

WA: $(X_{VA} + X_{YA} + X_{XA}) - (0) \leq 0$
WB: $(0) - (X_{WA} + X_{WD} + X_{WE}) \leq 0$
WC: $(X_{VC} + X_{XC} + X_{YC}) - (X_{WA} + X_{WD} + X_{WE} + X_{WB}) \leq 0$
WD: $(X_{YD} + X_{XD} + X_{ZD}) - (X_{WA}) \leq 0$
WE: $(X_{ZE} + X_{XE} + X_{YE} + X_{VE}) - (X_{WA} + X_{WD}) \leq 0$

Assim como os pares em que Xavier é contemplado, isto é, Xavier e Ana; Xavier e Beatriz; Xavier e Carolina; Xavier e Débora e Xavier e Érica:

XA: $(0) - (X_{XD} + X_{XC} + X_{XB}) \leq 0$
XB: $(X_{YB} + X_{ZB} + X_{WB}) - (X_{XD} + X_{XC}) \leq 0$
XC: $(X_{YC}) - (X_{XD}) \leq 0$
XD: $(X_{ZD}) - (0) \leq 0$
XE: $(X_{YE} + X_{VE}) - (X_{XD} + X_{XC} + X_{XB} + X_{XA} + X_{XB}) \leq 0$

Agora, os pares de Yuri, isto é, Yuri e Ana; Yuri e Beatriz; Yuri e Carolina; Yuri e Débora e Yuri e Érica:

YA: $(X_{XA}) - (0) \leq 0$
YB: $(X_{ZB} + X_{WB}) - (X_{YA} + X_{YD}) \leq 0$
YC: $(0) - (X_{YA} + X_{YD} + X_{YB} + X_{YE}) \leq 0$
YD: $(X_{XD} + X_{ZD}) - (X_{YA}) \leq 0$
YE: $(X_{VE}) - (X_{YA} + X_{YD} + X_{YB}) \leq 0$

E, por fim, os pares em que Zé está presente, isto é, Zé e Ana; Zé e Beatriz; Zé e Carolina; Zé e Débora e Zé e Érica:

ZA: $(X_{WA} + X_{VA} + X_{YA} + X_{XA}) - (X_{ZC} + X_{ZD}) \leq 0$
ZB: $(X_{WB}) - (X_{ZC} + X_{ZD} + X_{ZA}) \leq 0$
ZC: $(X_{WC} + X_{VC} + X_{XC} + X_{YC}) - (0) \leq 0$
ZD: $(0) - (X_{ZC}) \leq 0$
ZE: $(X_{XE} + X_{YE} + X_{VE}) - (X_{ZC} + X_{ZD} + X_{ZA} + X_{ZB}) \leq 0$

Notamos que todos os possíveis pares que cada mulher pode ter também estão contemplados nas equações, dado que cada mulher é parte de um dos pares que cada homem tem.

Ainda não falamos da função objetivo, que construiremos mais tarde.

Observação: Via de regra, na programação linear geral, o *Simplex* oferece resultados que são números reais. As equações que montamos tratam as variáveis $X(H,M)$ como variáveis booleanas e garantem seus valores como 0 ou 1 a partir da hipótese de serem inteiros. Esta condição, por sua vez, é garantida por um teorema de Vande Vate: todos os vértices do poliedro delimitado pelas restrições usadas têm coordenadas que são todas números inteiros. (GUSFIELD; IRVING, 1989, s. 3.7.2; ROTH; SOTOMAYOR, 1990, s. 3.2.4.)

❖ Exercícios

1) Podemos usar o mesmo sistema de equações e inequações para simular as propostas realizadas pelas mulheres?

Resposta: As equações são as mesmas por simetria, enquanto cada inequação

$$\sum_{H' <_M H} X(H', M) - \sum_{M' >_H M} X(H, M') \leq 0$$

equivale à das mulheres propondo

$$\sum_{M' <_H M} X(H, M') - \sum_{H' >_M H} X(H', M) \leq 0$$

(note, para tanto, e usando as equações $\Sigma_H X(H,M) = 1$ e $\Sigma_M X(H,M) = 1$, que a diferença dos membros esquerdos é $(1 - X(H,M)) - (1 - X(H,M)) = 0$, ou seja, são iguais).

2) Mostre que essas inequações equivalem, ainda, à seguinte:

$$\sum_{M' >_H M} X(H, M') + \sum_{H' >_M H} X(H', M) + X(H, M) \geq 1$$

que é apresentada em Roth; Sotomayor (1990, p. 70).

Resposta: Note que o primeiro e o terceiro termos do membro esquerdo, depois de somados, igualam $1 - \sum_{(M' <_H M)} X(H, M')$.

3) Como devem ser as equações e inequações para tratar um caso de listas incompletas e números diferentes de homens e mulheres?

Resposta: Devemos formar agora as inequações $\sum_H X(H,M) \leq 1$ e $\sum_M X(H,M) \leq 1$, impor $X(H,M) = 0$ para qualquer par em que algum dos dois não aceite o outro (ou, equivalentemente, remover essa variável de todo o sistema) e acrescentar a desigualdade do exercício anterior somente para pares (H,M) mutuamente aceitáveis. (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, p. 77, devido a ROTHBLUM)

Montagem da planilha e formulação do objetivo

Uma vez estabelecidas todas as equações necessárias, o passo seguinte para a resolução do problema é seguir os passos do *Simplex* no Excel. Para isso, temos que inserir todas essas informações numa planilha. Também montaremos a função objetivo.

Assim, primeiro criamos um cabeçalho: Na 1ª linha, inserimos "equação \ variável" ou "eq. \ var." que significa, respectivamente, os rótulos das equações e rótulos das variáveis nas equações. Na célula seguinte, inserimos o par "*VA*", na subsequente "*VB*", e assim em diante; quando todos os pares de Victor forem inseridos, começamos a inserir os pares de Wilson, e, então, de Xavier, Yuri e Zé, até inserir "*ZE*", na 27ª célula (coluna *AA*). Em seguida, diminuímos a célula seguinte numa menor largura e, nas nas 29ª e 30ª células (colunas *AC* e *AD)* inserimos "variáveis" e também diminuímos a largura da 31ª e 32ª células. Depois, na 33ª célula (coluna *AG*), inserimos "totais" e na 34ª célula (coluna *AH*), inserimos "disponível" ou "dispon.". A figura abaixo mostra isso, estando dividida em duas partes para melhor compreensão:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
YA	YB	YC	YD	YE	ZA	ZB	ZC	ZD	ZE		variáveis				totais	dispon.

Após a elaboração do cabeçalho, diminuímos a espessura da 2ª linha e montamos um outro cabeçalho, agora vertical, na 1ª coluna a partir da 3ª linha. Inserimos "objetivo" na 3ª linha (em referência à *função objetivo* de que ainda trataremos). Na linha seguinte, também diminuímos sua espessura, e, então, na 5ª linha, iniciamos a inserção das equações: inserimos "Victor" ou "*V*". linha seguinte, inserimos "Wilson" ou "*W*"; na subsequente, "Xavier" ou "*X*", e assim por diante. Quando todos os homens forem incluídos, inserimos, na linha seguinte, as mulheres, começando por "Ana" ou "*A*", seguida pelas demais mulheres. Por fim, depois que todas forem incluídas, inserimos os pares, começando com "*VA*", depois "*VB*" na seguinte, e assim por diante. Mostramos essa coluna em quatro partes:

	A
1	eq. \ var.
3	objetivo
5	V
6	W
7	X
8	Y
9	Z

10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	VA
16	VB
17	VC
18	VD
19	VE

20	WA
21	WB
22	WC
23	WD
24	WE
25	XA
26	XB
27	XC
28	XD
29	XE

30	YA
31	YB
32	YC
33	YD
34	YE
35	ZA
36	ZB
37	ZC
38	ZD
39	ZE

Uma vez esclarecidos os rótulos (informações dos cabeçalhos horizontal e vertical), inserimos os valores da *função objetivo:* o primeiro par é *VA*, sendo assim, temos de verificar qual é a posição de *A* na lista de preferências de *V*; como *A* é sua 1ª opção, inserimos o número 1 na interseção da 3ª linha com a coluna *VA;* em seguida, temos o par *VB*, de forma que, como *B* é a 5ª opção de *V*, inserimos o número 5 na célula *D*3 e continuamos fazendo o mesmo procedimento com cada um dos pares. Explicaremos essa função mais à frente.

Ao final, temos a seguinte *função objetivo* – quando são os homens que propõem (somente exibimos o começo da linha):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE
3	objetivo		1	5	2	3	4	1	4	5	2	3	4	3	2	1	5

O passo seguinte é inserir os coeficientes das equações feitas acima. Assim, na 5ª linha, como para Victor qualquer pareamento com ele e alguma das mulheres é possível, insere-se o número 1 nas células *C*5 a *G*5 (porque estão nas colunas dos pares em que Victor está presente), enquanto que nas demais células até a célula da coluna *AA* dessa linha inserimos 0 porque Victor não consta em mais nenhum par. Ademais, como a equação de Victor é igualada a 1, inserimos esse número na coluna "dispon." (coluna *AG*) na linha desta equação (5ª linha). Aqui estão as duas partes dessa linha:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE
3	objetivo		1	5	2	3	4	1	4	5	2	3	4	3	2	1	5
5	V		1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
YA	YB	YC	YD	YE	ZA	ZB	ZC	ZD	ZE		variáveis				totais	dispon.
1	3	5	2	4	3	4	1	2	5							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							1

Consequentemente, na 6ª linha, que se refere a Wilson, somente nas células de *H*6 a *I*6 inserimos o número 1, de forma que, nas células restantes até a coluna *AA*, inserimos o número 0, mas, também, depois, inserimos o número 1 na coluna *AG*. O mesmo é feito com as equações de cada um dos homens (na imagem, demonstramos apenas até o par *XE*):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE
3	objetivo		1	5	2	3	4	1	4	5	2	3	4	3	2	1	5
5	V		1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	W		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
7	X		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
8	Y		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	Z		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Depois, o mesmo é feito com as mulheres. Por exemplo, na 10ª linha, que se refere a Ana, inserimos o número 1 somente nas células das colunas em que ela é um dos parceiros, sendo elas *C*10, *H*10, *M*10, *R*10 e *W*10, além de inserirmos na coluna *AG*. Na 11ª linha, que se refere a Beatriz, somente inserimos o número 1 nas células *D*11, *I*11, *N*11, *S*11 e *X*11 e na coluna *AG;* depois, fazemos o mesmo com Carolina, Débora e Érica (na imagem, demonstramos apenas até o par *XE*):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE
3	objetivo		1	5	2	3	4	1	4	5	2	3	4	3	2	1	5
5	V		1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	W		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
7	X		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
8	Y		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	Z		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	A		1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	B		0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
12	C		0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
13	D		0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
14	E		0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

A partir da 15ª linha, os coeficientes são 1, 0 ou –1 e analisamos as inequações dos casais da seguinte maneira: os pares que estão dentro da primeira somatória recebem o número 1, enquanto que os que estão na segunda somatória, devido ao sinal de subtração, tornam-se –1, e os demais pares, que não aparecem em nenhum dos parênteses, recebem o número 0, assim como as células da coluna *AG*, uma vez que essas expressões são sempre menores ou iguais a 0. Por exemplo, *VA* tem a seguinte equação:

$$VA\text{: } (X_{YA} + X_{XA}) - (0) \leq 0$$

Logo, na linha deste par (15ª linha) procuramos a célula que faz interseção com a coluna de *YA*, no caso *R*15, e inserimos o número 1. Também procuramos a interseção com *XA*, no caso *M*15, e inserimos o número 1. Como não há mais nenhum par explícito, nas demais células, inserimos o número 0.

Na linha seguinte, temos o par *VB*, com a seguinte inequação:

$$VB\text{: } (X_{XB} + X_{YB} + X_{ZB} + X_{WB}) - (X_{VA} + X_{VC} + X_{VD} + X_{VE}) \leq 0$$

Assim, procuramos as interseções com os emparelhamentos do primeiro parêntese, no caso *I*16, *N*16, *S*16, *X*16, e inserimos o número 1. Depois procuramos as interseções com os pares do segundo parêntese, no caso *C*16, *E*16, *F*16 e *G*16, e inserimos o número – 1, enquanto que, nas demais células da linha, inserimos o número zero.

Fazemos isso com cada inequação referente a um par e obtemos a seguinte tabela (na imagem, demonstramos apenas até a coluna do par *XE*):

15	VA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
16	VB	-1	0	-1	-1	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
17	VC	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
18	VD	-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
19	VE	-1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	WA	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
21	WB	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
22	WC	0	0	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1	0	0	1	0	0
23	WD	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
24	WE	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
25	XA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
26	XB	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
27	XC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
28	XD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	XE	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
30	YA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
31	YB	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
32	YC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	YD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
34	YE	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	ZA	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
36	ZB	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
37	ZC	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
38	ZD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	ZE	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

O próximo passo é inserir os pares na coluna "Variáveis", (colunas *AC* e *AD*), como referência ao rótulo das variáveis propriamente ditas, de forma que, na célula *AC*9, inserimos "*VA*". Na célula abaixo, inserimos "*VB*" e assim em diante; depois, nas células ao lado (na coluna *AD*), inserimos o número 1, simplesmente para completar a planilha, uma vez que os valores nestas células irão variar com a execução do *Solver* (aqui mostramos em duas partes):

	A	AB	AC	AD
1			variáveis	
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9			VA	1
10			VB	1
11			VC	1
12			VD	1
13			VE	1
14			WA	1
15			WB	1
16			WC	1

17			WD	1
18			WE	1
19			XA	1
20			XB	1
21			XC	1
22			XD	1
23			XE	1
24			YA	1
25			YB	1
26			YC	1
27			YD	1
28			YE	1
29			ZA	1
30			ZB	1
31			ZC	1
32			ZD	1
33			ZE	1

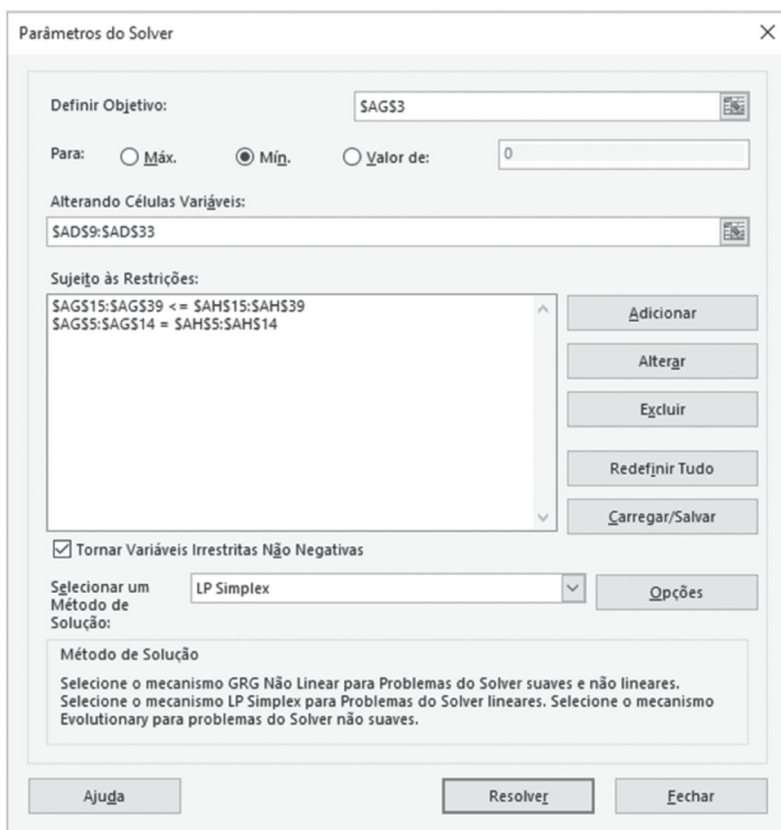
Em seguida, inserimos as fórmulas para o cálculo da otimização na coluna *AG*: Selecionamos da 5ª linha até a 39ª linha dessa coluna, pressionamos a tecla "F2", inserimos a fórmula

= MATRIZ.MULT (*C*5: *AA*39; *AD*9: *AD*33)

e pressionamos, simultaneamente, "Ctrl", "Shift" e "Enter". A fórmula calcula o produto da matriz das células de *C*5 até a célula *AA*39 com o vetor da coluna *AD* da 9ª linha até a 33ª linha. Trata-se de uma fórmula cujo resultado deve preencher todo um intervalo de células e o procedimento indica isso para o programa. Após o procedimento, o Excel exibe essa fórmula entre chaves para destacar essa particularidade. Em *AG*3, pomos:

= MATRIZ.MULT (*C*3: *AA*3; *AD*9: *AD*33),

que calcula a função objetivo com os parâmetros na coluna *AD*, da 9ª à 33ª linha. Enquanto não executamos o *Solver*, essas fórmulas calculam números que só depois serão otimizados. (O leitor deve experimentar o uso das fórmulas matriciais também no exemplo da seção anterior.)

Portanto, o próximo passo é executar o *Solver*. Para isso, selecionamos a aba “Ferramentas” ou “Dados” do menu principal do Excel e, em seguida, selecionamos *Solver*. Assim, primeiramente temos de determinar a “Célula de Destino”, isto é, a célula que acumula o valor calculado da *função objetivo*, que, neste caso, é a célula *AG*3. Para obter uma alocação mais favorável aos homens, selecionamos, então, a opção “Mín.”, como explicaremos a seguir. Depois, selecionamos as “Células Variáveis”, isto é, os valores dos coeficientes que irão mudar de acordo com a execução do *Solver*, sendo eles as células da coluna *AD* da 9ª linha até a 33ª linha. Por fim, inserimos as restrições no quadro de diálogo, de modo que, como montamos as equações e inequações, os valores de *AG*5 até *AG*14 devem ser iguais aos valores de *AH*5 até *AH*14 e os valores de *AG*15 até *AG*39 devem ser menores ou iguais aos valores de *AH*15 até *AH*39, respectivamente, enquanto as variáveis incógnitas devem ser não negativas.

Uma vez incluídos os elementos de análise, selecionamos "LP Simplex" como modelo de solução e, então, clicamos em "Resolver". Em vista disso, o *Solver* começa a ser executado, com os homens sendo os mais favorecidos. Na solução encontrada, observamos, primeiro, os pares formados nas colunas *AC* e *AD*, sendo eles os pares que, na coluna *AD*, pela otimização do *Solver*, obtiveram o número 1. Portanto, temos: Victor e Debora (*VD*); Wilson e Ana (*WA*); Xavier e Beatriz (*XB*); Yuri e Érica (*YE*); e Zé e Carolina (*ZC*). Notamos que esse resultado é exatamente igual ao que obtivemos manualmente na Seção 1.2.

A próxima figura exibe a planilha completa que montamos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1	eq. \ var.		VA	VB	VC	VD	VE	WA	WB	WC	WD	WE	XA	XB	XC	XD	XE	YA	YB	YC	YD	YE	ZA	ZB	ZC	ZD	ZE		variáveis				totais	dispon.
3	objetivo		1	5	2	3	4	1	4	5	2	3	4	3	2	1	5	1	3	5	2	4	3	4	1	2	5						12	
5	V		1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						1	1
6	W		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						1	1
7	X		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						1	1
8	Y		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0						1	1
9	Z		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1		VA	0			1	1
10	A		1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0		VB	0			1	1
11	B		0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		VC	0			1	1
12	C		0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0		VD	1			1	1
13	D		0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0		VE	0			1	1
14	E		0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1		WA	1			1	1
15	VA		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		WB	0			0	0
16	VB		-1	0	-1	-1	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		WC	0			0	0
17	VC		-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		WD	0			0	0
18	VD		-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0		WE	0			0	0
19	VE		-1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		XA	0			-1	0
20	WA		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		XB	1			0	0
21	WB		0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		XC	0			-1	0
22	WC		0	0	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		XD	0			-1	0
23	WD		0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0		XE	0			-1	0
24	WE		0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1		YA	0			0	0
25	XA		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		YB	0			-1	0
26	XB		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		YC	0			0	0
27	XC		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		YD	0			0	0
28	XD		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		YE	1			0	0
29	XE		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		ZA	0			0	0
30	YA		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		ZB	0			0	0
31	YB		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0		ZC	1			0	0
32	YC		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	0	0	0	0	0		ZD	0			-1	0
33	YD		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0		ZE	0			0	0
34	YE		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0						0	0
35	ZA		1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0						0	0
36	ZB		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0						-1	0
37	ZC		0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0						0	0
38	ZD		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0						-1	0
39	ZE		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	0						0	0

Explicação da função objetivo

Também devemos observar, nesta tabela final, o valor da *função objetivo*, que significa a otimização da soma das posições dos pares de todos os homens.

➥**Notação:** Para denotar a posição de M na lista de preferência de H, utilizamos a expressão $P_H(M)$. Ao passo que, para denotar a posição de H na lista de preferência de M, utilizamos a expressão $P_M(H)$.

A função objetivo que minimizamos é simplesmente:

$$\sum_{H,M} P_H(M) \cdot X(H,M)$$

➥**Justificativa:** Essa somatória adiciona o termo exibido, simultaneamente, para todos os homens e mulheres. Porém, para cada homem H, somente uma variável $X(H,M)$ vale 1 e as demais valem 0, então, somente um fator $P_H(M)$ é efetivamente adicionado e é o que corresponde à esposa de H, enquanto os demais termos são anulados.

Dessa forma, o número 12, na célula *AG*, significa a soma das 3 posições que Victor tem em sua lista de preferências até sua parceira, Débora, com mais 1 posição da lista de Wilson até Ana; além de mais 3 posições na lista de Xavier; 4 posições na lista de Yuri e 1 posição na lista de Zé:

Victor:	$A > C > \boxed{D} > E > B$	posição 3	
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	posição 1	
Xavier:	$D > C > \boxed{B} > A > E$	posição 3	} total 12
Yuri:	$A > D > B > \boxed{E} > C$	posição 4	
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	posição 1	

Desse modo, na prática, instruímos o *Solver* a procurar pela menor soma das distâncias das mulheres nas listas de seus parceiros. Se desejamos uma alocação mais favorável às mulheres, selecionamos "Máx.", porque esta procura pela maior soma das distâncias das mulheres nas listas de seus parceiros, lembrando que o pior pareamento para os homens significa o melhor pareamento para as mulheres. Logo, não é necessário que modifiquemos a função objetivo, uma vez que selecionar "Máx." já significa inverter os sinais de todas as equações como se invertêssemos os papéis dos dois grupos de agentes.

3.4 Emparelhamento estável igualitário

Na formulação acima, explicitamos que, ao utilizarmos a programação linear para resolução do problema do casamento, deveríamos optar ou por minimizar a função objetivo, favorecendo, então, o grupo que faz as propostas, ou maximizar essa função, de forma a favorecer o grupo que recebe as propostas. Entretanto, alguns avanços já foram feitos, de forma que esse mecanismo não se restrinja a tais opções.

Assim, é possível a descoberta de emparelhamentos mais igualitários entre os homens e as mulheres a partir da inclusão de "pesos" de preferência ao invés de somente uma lista ordenada.

Por exemplo, podemos tratar homens e mulheres simetricamente e igualmente a partir de uma função objetivo que os contemple dessa forma:

$$\sum_{H,M} [\, P_H(M) + P_M(H) \,] \cdot X(H,M)$$

Essa expressão, na reunião entre homens e mulheres, considera simultaneamente os pesos das preferências de ambos, de acordo com a posição de seu parceiro em sua lista de preferência.

Dessa forma, é possível formular uma nova função objetivo, com a qual obteremos um resultado de emparelhamento igualitário quando é minimizada.

A Seção 3.6 de Gusfield; Irving (1989) dá três definições de emparelhamentos mais simétricos entre proponentes e seletores, inclusive a somatória acima, e algoritmos eficientes para encontrá-los, utilizando princípios teóricos subjacentes a Gale-Shapley em vez da programação linear geral.

Uma dessas definições permite maior flexibilidade na formulação de listas de preferência, em que cada agente atribui "pontuações" àqueles que deve comparar, em lugar de simples "posições". Por exemplo, o agente X pode expressar o *quanto* $A >_X B$ atribuindo valores reais $P_X(A)$ e $P_X(B)$ que devem apenas satisfazer $P_X(A) < P_X(B)$ (note que, quanto menor a pontuação ou nota, melhor a opção).

É possível, até mesmo, estabelecer um "passeio" partindo do emparelhamento ótimo dos homens e chegando ao das mulheres, para escolhermos qualquer ponto entre eles: para $t \in [0,1]$, defina

$$V(t) = \sum_{H,M} [\,(1-t) \cdot P_H(M) + t \cdot P_M(H)\,] \cdot X(H,M)$$

O parâmetro t pode ser identificado em uma célula adicional da planilha que montamos e usado na fórmula da função objetivo $V(t)$ (que é função das variáveis X_{HM}). Então, $V(0)$ é a função objetivo que, minimizada, induz o emparelhamento ótimo dos homens; $V(1)$ é aquela ótima para as mulheres; corresponde à primeira somatória acima, exceto por um fator de escala, e tem os mesmos pontos de máximo e de mínimo.

Além de possibilidades como essas, Gusfield; Irving (1989, p. 219) propõem tornar a soma das "pontuações" dos homens $\sum_{H,M} P_H(M) \cdot X(H,M)$ a mais próxima possível à soma das "pontuações" das mulheres $\sum_{H,M} P_M(H) \cdot X(H,M)$. Em Knuth (1997, p. 51), minimiza-se não a somatória, mas uma função de máximo:

$$\max_{H,M} \{\, P_H(M) \cdot X(H,M),\;\; P_M(H) \cdot X(H,M)\,\}$$

3.5 Discussão

Apresentamos e exemplificamos a resolução de problemas do casamento a partir da otimização linear e do algoritmo *Simplex*, com a aplicação da ferramenta *Solver* no Excel.

Como a programação linear pôde, também, resolver um problema envolvendo maçãs, farinha, bolos e tortas, assim como é cotidianamente utilizada na indústria, observamos que expressar o problema do casamento em um sistema de equações e inequações lineares foi mais um exemplo de *redução*, agora do problema do casamento aos problemas de otimização linear. Nós o utilizamos, também, para apresentar algumas melhorias, especialmente para a busca por emparelhamentos estáveis igualitários.

Destacamos, porém, que esse mecanismo de resolução não é o mais eficiente, porque o de Gale-Shapley requer menos passos e cálculos. Também Gusfield; Irving (1989, s. 3.7.1) apresentam uma redução mais eficiente à programação linear, mas concedem (p. 147) que o sistema de Vande Vate é mais elegante e não requer uma solução preliminar, nem o conceito de rotações que estudaremos somente no problema dos colegas de quarto.

4

Manipulação e trapaças

Um problema de sistemas de seleção e alocação é, na realização prática, a preocupação dos candidatos em entender o processo a que serão submetidos e atuar de modo a obter o melhor resultado possível.

No modelo de alocação que consideramos, com propostas e escolhas, perceberemos a possibilidade de um candidato rejeitar uma proposta que prefira e escolher uma outra que considere pior, a fim de alcançar um resultado melhor no final do processo. Dessa forma, o agente apresentaria erroneamente suas preferências com o propósito de obter resultados diferentes, realmente preferíveis.

Assim, ao discutirmos a aplicação do algoritmo Gale-Shapley e dos programas desenvolvidos para situações do cotidiano, é necessário examinar a questão da manipulação dos dados, principalmente a partir da apresentação falsa das preferências. O ponto de partida para essa análise é o questionamento: é do interesse de todos os agentes envolvidos indicar suas verdadeiras preferências?

Verifica-se que a resposta é negativa, porque o interesse mútuo de todos os agentes em falar a verdade não ocorre em nenhum procedimento que produza soluções estáveis. (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, p. 87) Como observamos na Seção 1.3, será necessário considerar qualquer possível procedimento, não apenas Gale-Shapley, e demonstrações formais no caso deste, não apenas nossa intuição com a movimentação das “molduras”.

4.1 Como ocorre a trapaça

Como um exemplo, adaptado com modificações de Roth; Sotomayor (1990, p. 81), tomamos o seguinte conjunto de preferências:

Victor (V):	$A > B > C > D$	Ana (A):	$W > X > V > Y > Z$
Wilson (W):	$D > B > A > C$	Beatriz (B):	$X > V > W > Y > Z$
Xavier (X):	$D > C > B > A$	Carolina (C):	$Z > Y > V > W > X$
Yuri (Y):	$A > D > C > B$	Débora (D):	$V > W > Y > Z > X$
Zé (Z):	$A > B > D > C$		

A partir dessas preferências, obtemos as seguintes alocações quando os homens propõem: $V – A$, $W – D$, $X – B$, Y solteiro, $Z – C$.

Entretanto, se Ana muda sua lista de preferências, de modo a apresentar uma ordenação falsa em que diz preferir Yuri e Zé a Victor, isto é:

$$\text{Ana } (A)\text{: } W > X > Y > Z > V,$$

obtemos outra formação de casais: $V – D$, $W – A$, $X – B$, Y solteiro, $Z – C$.

com preferências verdadeiras		**com preferências falsas**	
A:	$W > X > \boxed{V} > Y > Z$	A:	$\boxed{W} > X > Y > Z > V$
B:	$\boxed{X} > V > W > Y > Z$	B:	$\boxed{X} > V > W > Y > Z$
C:	$\boxed{Z} > Y > V > W > X$	C:	$\boxed{Z} > Y > V > W > X$
D:	$V > \boxed{W} > Y > Z > X$	D:	$\boxed{V} > W > Y > Z > X$

Assim, ao apresentar erroneamente suas preferências, Ana melhora sua situação, pois se aloca ao homem que prefere verdadeiramente, enquanto que, antes, estava alocada ao seu terceiro homem mais preferível.

Além disso, Débora também é beneficiada indiretamente pela trapaça de Ana, dado que foi promovida de seu segundo homem mais preferível para o primeiro.

Logo, para Ana, é um comportamento estratégico apresentar falsas preferências a fim de manter-se junto a um homem menos preferível dentre as propostas que recebe, para que, em alguma etapa posterior do processo, receba a proposta de um homem mais preferível que, se não fosse pela trapaça, não chegaria a lhe propor.

❖ **Exercício**

1) Aplique o algoritmo Gale-Shapley aos dois conjuntos de preferências e confira o exemplo.

Porém, para que a manipulação ocorra e seja bem-sucedida, Ana teria que saber as preferências das demais pessoas a fim de realizar simulações do processo e descobrir como suas preferências falsas poderiam impor novas escolhas. As propostas inéditas a ela por seus candidatos mais preferíveis ocorrem quando as mulheres a quem eles propuseram, antes, rejeitaram-nos em favor de novas opções de parceiros e estes, por sua vez, fazem tais propostas devido às rejeições de Ana.

Assim, para trapacear e ser favorecida, ou Ana tem de ter acesso às listas de preferências das demais pessoas ou as propostas têm de ser rodadas mais de uma vez, de forma que, a partir da observação das propostas e escolhas, Ana tenha, pelo menos, um esboço das preferências.

> ➥**Definição:** *Estratégia* é uma decisão sobre o conjunto de ações a realizar, como uma postura ou raciocínio para apresentação de informações e decisões, qualquer que seja. Cada manipulação das preferências, condicionada ou não às preferências alheias, é uma estratégia, mas ser honesto quanto a suas preferências também é uma estratégia.
>
> ➥**Definição:** A estratégia *dominante* de um agente é a estratégia que melhor responde às possíveis estratégias que possam

ser adotadas pelos demais agentes. As razões para tal estratégia, que deverá ser seguida pelo agente, acabam por esclarecer que não há nenhum incentivo a ele para que atue de forma diferente.

Assim, em uma situação-problema em geral, é importante determinar qual é a estratégia dominante de cada agente.

Viabilidade da manipulação

Para verificarmos quando a trapaça é possível, destacamos alguns resultados e informações de Roth; Sotomayor (1990, p. 87-90), referentes a um "mercado", ou conjunto de agentes, no qual as preferências são estritas e existe mais de uma alocação estável.

Ao analisar a escolha de cada agente por sua estratégia dominante, Roth constatou que não existe nenhum mecanismo de alocação estável em que indicar as preferências verdadeiras seja a estratégia dominante para todos os agentes. Essa observação ficou então conhecida como o Teorema da Impossibilidade de Roth. Depois, por consequência, concluiu-se que não existe nenhum mecanismo de alocação estável em que indicar as preferências verdadeiras seja a melhor estratégia para todos os agentes quando todos os outros agentes indicam suas verdadeiras preferências, ou seja, pelo menos um agente pode se beneficiar ao apresentar erroneamente suas preferências, assumindo que os outros contaram a verdade.

Adaptamos, aqui, o exemplo da demonstração dada por Roth e Sotomayor:

Xavier (X):	$A > B$	Ana (A):	$Y > X$
Yuri (Y):	$B > A$	Beatriz (B):	$X > Y$

Só há dois emparelhamentos possíveis e ambos são estáveis: (1º) $X - A$, $Y - B$, ótimo para os homens, e (2º) $X - B$, $Y - A$, ótimo para

as mulheres. Se Ana mudar sua lista para $Y > \blacksquare$, então somente o segundo pode ser obtido, qualquer que seja o mecanismo, garantindo sua melhor escolha. Analogamente, qualquer agente (Xavier, Yuri ou Beatriz) pode impôr que somente um emparelhamento seja possível e, então, obtido pelo mecanismo, contanto que os demais três mantenham suas listas originais.

❖ Exercício

1) Verifique a estabilidade dos dois emparelhamentos e o sucesso das estratégias dos quatro agentes.

Gale e Sotomayor mostraram como, em uma dada situação, ao menos um agente pode trapacear: se há ao menos dois emparelhamentos estáveis, o mecanismo produz – um que é distinto ou do ótimo dos homens ou do ótimo das mulheres; um desses agentes, portanto, não atinge seu ótimo possível e beneficia-se ao remover de sua lista todos os indivíduos que considera piores que esse ótimo.

Entretanto, note que os agentes que apresentam preferências falsas são aqueles que recebem as propostas, enquanto que os agentes que propõem têm como melhor estratégia, ou estratégia dominante, indicar suas verdadeiras preferências, dado que o resultado é sempre o melhor possível para eles.

Por exemplo, considerando as seguintes listas de preferência para o uso de Gale-Shapley:

Xavier:	$A > C > B$	Ana:	$Y > X > Z$
Yuri:	$A > B > C$	Beatriz:	$X > Z > Y$
Zé:	$C > B > A$	Carolina:	$Y > X > Z$

Com o desenrolar do processo, terminamos, na última rodada, com:

Xavier:	$A > \boxed{C} > B$	Ana:	$\boxed{Y} > X > Z$
Yuri:	$\boxed{A} > B > C$	Beatriz:	$X > \boxed{Z} > Y$
Zé:	$C > \boxed{B} > A$	Carolina:	$Y > \boxed{X} > Z$

Como vimos no Capítulo 1, percebe-se, pelo próprio movimento das molduras, que o homem sempre propõe primeiro à melhor opção possível disponível e, se modificar sua lista de preferências, será, então, pareado à primeira mulher preferível que o aceitar, da mesma forma que ocorre quando se falar a verdade.

❖ Exercício

1) Aplique o algoritmo de Gale-Shapley e confira esse exemplo.

Se, nesta situação, tanto Xavier como Zé, os homens que não estiveram com sua primeira opção, inverterem suas listas de qualquer forma, vão continuar com Carolina e Beatriz como suas melhores opções possíveis, respectivamente, dado que a primeira opção de Xavier está bloqueada pelo par Ana e Yuri, que se preferem mutuamente, e, por conseguinte, a primeira opção de Zé está bloqueada pelo par Xavier e Carolina. Zé e Beatriz, mesmo cada um não sendo a primeira opção do outro, preferem-se mutuamente, pois seus parceiros "ideais" (Ana e Yuri, respectivamente) já formam um par de bloqueio, que não pode ser desfeito para que o resultado continue a ser estável. Logo, não há incentivos para eles falsearem sua lista de preferência para serem alocados a uma outra parceira.

Isso em razão de que, sendo os homens que propõem, a situação de cada um apenas pode "piorar" em termos de sua lista de preferência. Quando o processo termina, o homem conseguiu sua parceira mais preferível possível sem manipular o mecanismo, porque, se escolher alguém menos preferível numa rodada, não haverá como, posteriormente, escolher uma parceira mais preferível.

Logo, a manipulação de um homem em sua lista de preferência, quando são eles que propõem, não pode ser bem-sucedida, porque o

resultado será para ele tão bom quanto o resultado original de suas preferências verdadeiras.

Por isso, Dubins e Freedman, assim como Roth, concluíram que o mecanismo que resulta na melhor alocação estável para os homens (nos termos de preferências indicadas) faz com que a estratégia dominante para cada homem seja indicar suas verdadeiras preferências. Ademais, é importante ressaltar que, quando são as mulheres que propõem, por simetria, ser verdadeira também é a estratégia dominante de todas elas. Portanto, de forma geral, para o grupo que faz as propostas, a melhor estratégia é sempre ser verdadeiro.

Observações: Até aqui, porém, nossas conclusões estão condicionadas a duas hipóteses: 1) Somente tratamos homens monogâmicos. Um agente proponente com várias "vagas" pode constituir uma "coalizão" dessas vagas e obter vantagens, como destacaremos na próxima seção. 2) Ademais, não estamos considerando possíveis "externalidades", isto é, incentivos como propinas para que um homem altere sua lista de preferências. Assumimos que os agentes proponentes, nesse raciocínio, somente agem em seu próprio benefício e somente em vista da alocação obtida.

4.2 Coalizões

Vimos que, para todo agente que faz as propostas, a melhor política é a honestidade, já que não há necessidade de esses agentes modificarem suas preferências para obterem resultados melhores.

Também é possível mostrar que, considerando os agentes que propõem, uma coalizão deles (isto é, um subconjunto) também não obtém incentivos o suficiente para desejar manipular suas preferências, porque não há uma alocação que todos os integrantes da coalizão prefiram, de modo que a melhor estratégia é ser verdadeiro. (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, p. 92, devido a Dubins e Freedman)

> ➥**Definição:** *Coalizões* são reuniões de dois agentes ou mais que agem em conjunto a fim de alterar o resultado das alocações.

Portanto, para qualquer agente do grupo que propõe, a melhor estratégia, tanto individual como de coalizão, é ser verdadeiro.

Entretanto, como falsear suas preferências pode ser uma estratégia dominante para algumas pessoas do grupo que recebe as propostas, também pode ser estratégico para uma coalização de indivíduos deste grupo, de forma que seus indivíduos escolham a trapaça como sua estratégia dominante.

Por exemplo, as mulheres podem negociar entre si a escolha de um emparelhamento estável qualquer, até mesmo aquele que é ótimo para elas, e, então, cada mulher apresentar uma lista incompleta de preferência, consistindo apenas do homem que lhe cabe nesse emparelhamento. Dessa maneira, qualquer mecanismo de alocação estável, mesmo Gale-Shapley com propostas feitas pelos homens, produzirá, precisamente, esse emparelhamento (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, teo. 4.15 devido a Gale e Sotomayor). Ou, em nosso primeiro exemplo, Débora solicitar a Ana que manipule sua lista de preferência, em benefício de si mesma, mas, também, ajudando à primeira.

Quando a coalizão provê algo mais

Até aqui, a noção que temos de uma coalizão é a de um mero conjunto de agentes. É preciso considerar, todavia, que uma coalizão, como um clube exclusivo, também possa oferecer a seus membros benefícios externos ao mercado em questão.

Assim, um homem (como agente proponente) pode, apresentando listas incompletas, alterar significativamente o resultado final sem se prejudicar. Se uma coalizão de outros homens se interessar nisso e subornar este homem, pode, então, construir resultados mais favoráveis a si mesma. (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, s. 4.3.1.)

Essa situação é especialmente relevante no casamento poligâmico, porque indica que as vagas proponentes (de um mesmo homem) podem realizar uma coalizão. Veremos um exemplo disso na Seção 5.3, que demonstra uma universidade *A* que pode melhorar de situação, mesmo quando universidades propõem. (Lá, poderá usar a lista

$W > Y > V > X$, cf. Roth; Sotomayor, 1990, teo. 5.14.) Os candidatos, sendo monogâmicos, porém, não têm motivo para trapacear quando propõem. (op. cit., teo. 5.16, e nossa discussão)

4.3 Evitando a trapaça

Face a toda essa discussão, qualquer projeto prático de mecanismo para alocações estáveis deve ter, em sua concepção, a preocupação de induzir os agentes ao comportamento honesto, ou limitar o incentivo à trapaça. Podemos, a partir da observação dos exemplos e técnicas descritos, esboçar algumas regras heurísticas:

A primeira é impedir que os agentes submetam listas de preferência muito curtas ou sequer incompletas, consistindo somente de suas opções mais preferíveis. Naturalmente, com uma lista assim, o agente assume, também, o risco de não ser alocado (ou "ficar solteiro").

Outra é, em situação de poligamia ou oferta de vagas que constituem coalizões, fazer com que os agentes poligâmicos formem o grupo seletor e não o proponente.

O sistema pode incluir um mecanismo de desfavorecimento dos agentes quando trapaceiam e a trapaça não é bem-sucedida ou é detectável e existe um elemento fiscalizador (ou externo ou formado por um grupo de agentes). Isso torna a ação de trapacear desnecessária ou prejudicial e deixa de "valer a pena". Um exemplo disso pode ser formulado entre estudantes e universidades: caso uma universidade admita alunos com notas baixas demais para seu padrão, sua credibilidade e imagem exterior acabarão prejudicadas perante toda a comunidade. Consequentemente, ela poderá deixar de receber inscrição de novos candidatos devido à desconfiança, de forma que, num futuro próximo, tenha dificuldade para admitir estudantes.

Além disso, pode-se impor a condição de que cada agente está preocupado com sua própria alocação, de forma a não se interessar em ajudar outros agentes. Porém, para que isso assim seja, não deve haver externalidades, como incentivos financeiros de um agente ao outro,

para que um agente não seja convencido por outro a trapacear, mesmo que sua alocação continue a mesma enquanto que aquele que o incentivou melhore de situação (em razão da qual oferece o incentivo). Esta é outra necessidade de fiscalização externa ao mercado.

Costuma-se, em geral, atribuir o papel de proponente ao grupo de agentes que deva ser melhor alocado, para obter seu ótimo. Sem dúvida, essa estratégia se particulariza às questões de manipulação, porque será oportuno identificar esse grupo como o que também seja mais difícil de fiscalizar, enquanto os agentes seletores possam ser orientados apenas com base em sua reputação.

Outro mecanismo utilizado para se evitar a trapaça é a realização do processo de alocação uma única vez para evitar que, ao estudar os resultados, os agentes mudem suas estratégias para obter melhores resultados numa tentativa posterior.

Finalmente, descobriu-se, também, que os benefícios da trapaça são limitados e minimizados quando o mercado é suficientemente grande e cada participante interage com poucos agentes do outro grupo. Esse é um exemplo de resultado primeiramente indicado por simulações computacionais e, depois, explicado teoricamente. (ROYAL SWEDISH ACADEMY of SCIENCES, 2012b, p. 14; ROTH; PERANSON, 1999 [resumo])

5

O problema das admissões em universidades

A discussão do problema do casamento não abrange a maioria dos problemas enfrentados na economia contemporânea, mesmo aqueles sem mecanismo de preços, devido ao fato de que nesses mercados do mundo real não são estruturadas somente alocações entre dois conjuntos de agentes que se combinam em pares.

Assim, consideraremos, agora, os dilemas de situações mais complexas, como o intitulado problema das admissões em universidades, em que alocamos a uma única universidade mais do que um único estudante, pois cada curso universitário busca obter uma determinada quantidade máxima de alunos matriculados.

Dessa forma, temos dois grupos, universidades e estudantes, de modo que os estudantes buscam ser admitidos nas universidades, enquanto as universidades procuram admitir uma certa quantidade de estudantes (na literatura: "quota"), escolhidos a partir de uma avaliação das qualificações destas inscrições. Um exemplo de elemento considerado para a ordenação das preferências pode ser a nota em uma prova, de modo que os estudantes escolhidos são aqueles com as maiores notas (assumindo que não há nenhum aluno com notas iguais, ou que há critérios de desempate).

Ademais, semelhantemente ao problema do casamento, o conceito de estabilidade, nessas situações, diz respeito à inexistência de bloqueios, ou seja, não há um curso e um estudante que não

estejam alocados entre si, ainda que assim o preferissem, ou um estudante ou universidade que esteja alocado com um membro do grupo oposto considerado inaceitável. Logo, uma alocação é estável se não é bloqueada por nenhum agente individual (estudante ou universidade) ou por qualquer "par" de universidade e estudante.

Consequentemente, se não há inscrições suficientes de estudantes aceitáveis, qualquer universidade pode escolher manter quaisquer vagas sem serem ocupadas, assim como se qualquer estudante não conseguir ser aceito em nenhuma de suas opções aceitáveis de universidade ou se desejar não entrar em nenhuma universidade, ele pode permanecer sem ser alocado a uma universidade. (Essas considerações podem não ser válidas, ou ser limitadas, por normatizações públicas ou internas.)

5.1 Exemplo com Gale-Shapley

Para expor o raciocínio pelo qual se desenvolve essa alocação por Gale-Shapley, segue uma demonstração do processo. A título de exemplo, tomamos o universo de 5 estudantes e 2 universidades, cada uma com uma quota de 2 vagas (em um único curso ou ciclo básico), sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Universidade Alfa (A); Universidade Beta (B).

Primeiramente, os estudantes ordenam as universidades segundo a ordem de suas preferências (podendo omitir aquelas em que não desejam estudar em hipótese alguma) e inscrevem-se em suas primeiras opções.

Em seguida, as inscrições são enviadas às universidades, que, por sua vez, listam as inscrições recebidas em uma ordem de preferência, podendo rejeitar as inscrições que não aceitam de forma alguma.

Para nosso exemplo, temos as seguintes listas de preferência:

Victor (V):	$A > B$	Alfa (A) (2 vagas):	$V > X > Z > W$
Wilson (W):	$A > B$	Beta (B) (2 vagas):	$X > Y > W > Z$
Xavier (X):	$B > A$		
Yuri (Y):	$B > A$		
Zé (Z):	$B > A$		

No primeiro passo, como $q = 2$ em ambas as universidades, Alfa admite Victor e Wilson, enquanto que Beta admite Xavier e Yuri, mas rejeita Zé:

Victor (V):	$\boxed{A} > B$	Alfa (A) (2 vagas):	$\boxed{V} > X > Z > \boxed{W}$
Wilson (W):	$\boxed{A} > B$	Beta (B) (2 vagas):	$\boxed{X} > \boxed{Y} > W > Z$
Xavier (X):	$\boxed{B} > A$		
Yuri (Y):	$\boxed{B} > A$		
Zé (Z):	$\hat{B} > A$		

Os estudantes rejeitados enviam sua inscrição à sua segunda universidade escolhida e mais uma vez cada universidade escolhe as melhores q inscrições dentre as novas inscrições que recebe e aquelas que já estavam na turma preliminar, formando, então, uma nova turma e rejeitando o resto. O processo termina quando todo estudante está ou em uma turma preliminar ou foi rejeitado por todas as universidades que deseja. Neste ponto, todas as universidades admitem todos os alunos em suas turmas.

Como Zé foi rejeitado, ele envia sua inscrição para Alfa, que o prefere a Wilson. Na terceira rodada, Wilson envia sua inscrição a Beta, mas esta também o rejeita, porque já completou sua quota com Xavier e Yuri, que prefere a ele.

Por fim, não há mais envio de inscrições, de forma que o processo termina com as admissões de Victor e Zé na universidade Alfa, enquanto que a universidade Beta também completa suas vagas ao admitir Xavier e Yuri.

Neste exemplo, nenhuma universidade permaneceu com vagas ociosas, mas isso é possível, tal qual no problema do casamento com poligamia.

5.2 Incertezas na prática descentralizada

Em um mercado sem um sistema de seleção centralizado, como o Sisu, no Brasil, a quota de vagas de uma universidade pode não ser satisfeita, mesmo que a universidade aprove a mesma quantidade q de inscrições, pois não há como assumir que todos os alunos que são admitidos aceitarão a oferta; de fato, é incerto se um estudante enviou suas inscrições simultaneamente a outras universidades, como ele ordenou as universidades de sua preferência e se outras universidades também irão aceitá-lo, situações essas que poderiam afetar as escolhas do candidato.

Por outro lado, para o estudante, o mesmo processo também é incerto devido à possibilidade de ele ser classificado na lista de espera de uma universidade pouco depois do último estudante contemplado dentro da quota desta universidade, o que significa que, mesmo ele não sendo admitido, ele pode vir a ser futuramente se ocorrer uma desistência.

Em consequência de ambas as perspectivas, o cenário das admissões torna-se problemático: uma pessoa admitida em uma universidade, mas também na lista de espera de outra, que prefere, pode matricular-se na universidade em que é admitido e desistir dela se for chamado pela outra, o que introduz problemas quanto à vaga dele, agora disponível na primeira universidade.

Na Seção 5.4, mesmo com sistemas centralizados, conheceremos problemas semelhantes de colapso e *congestão* do mercado, um fenômeno em que os agentes participantes não conseguem conhecer uns aos outros e interagir, apesar de sua disponibilidade.

5.3 Semelhança e distinção com o problema do casamento

A admissão de mais de um aluno em cada universidade pode ser vista como a escolha dos homens por mais de uma mulher (poligamia), através de um mecanismo em que cada universidade reparte sua capacidade de admissão em “vagas” assim como vimos, na Seção 2.3, os homens fazerem para cada uma de suas mulheres.

Assim, ao invés de pensar na universidade com capacidade para ingressantes, podemos considerar suas vagas A_1, A_2, ..., A_n como diferentes agentes, mas com preferências idênticas às de A. Simultaneamente, substituímos A nas listas de preferências dos estudantes pelas vagas A_1, A_2, ..., A_n, estipulando que eles preferem $A_1 > A_2 > ... > A_n$ para uniformizar a escolha entre vagas equivalentes.

Esse mecanismo foi, de fato, utilizado por Gale e Sotomayor em um estudo teórico (ROTH, 1985, p. 282): esses autores compararam o problema de admissão e o problema do casamento formulado a partir dele, verificando que os emparelhamentos possíveis em um cenário correspondem aos emparelhamentos possíveis no outro e, também, que existe essa correspondência entre os emparelhamentos estáveis de um e do outro.

Roth destacou que ainda existem os ótimos para universidades e para estudantes, como Gale e Shapley indicaram (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, cor. 5.9 a respeito de hospitais e médicos residentes).

↪**Propriedade:** Gale, Sotomayor e Roth também notaram que, em um mesmo cenário de listas de preferência estrita, todas as possíveis alocações estáveis compartilham as seguintes características:

- Toda universidade preenche sempre o mesmo número de vagas.
- Toda universidade que não completa suas vagas obtém sempre os mesmos estudantes.
- Os estudantes não alocados, se houver, são sempre os mesmos.

Referências: Roth; Sotomayor (1989, teos. 1 e 2; 1990, teos. 5.12 e 5.13) e Gusfield; Irving (1989, teo. 1.6.3).

Entretanto, como o próprio título de Roth (1985) declara, “o problema das admissões em universidades não é equivalente ao problema do casamento”. A explicação para isso requer um conceito adicional, o de “otimalidade fraca de Pareto”:

↪**Definição:** Uma alocação é *ótima no sentido fraco de Pareto* para um grupo de agentes se não existe outra alocação, seja

estável ou instável, em que *todos* os membros desse grupo tenham alocação *estritamente* melhor.

Na Seção 1.3, explicamos que o emparelhamento monogâmico conduzido pelo algoritmo de Gale-Shapley com propostas feitas pelos homens é ótimo para os homens, dentre os emparelhamentos estáveis, mas não o comparamos imediatamente com todos os possíveis emparelhamentos, inclusive os instáveis. Ainda assim, é possível expandir o raciocínio para mostrar que o resultado de Gale-Shapley é ótimo no sentido fraco de Pareto, ou seja, mesmo nessa comparação mais geral, em qualquer outro emparelhamento algum homem não melhora sua associação. (ROTH; SOTOMAYOR, 1990, teo. 2.27)

Ao desmembrar as universidades em suas vagas, tratamos cada vaga como um agente diferente. Portanto, ao aplicarmos Gale-Shapley, a vaga será atribuída a um estudante e, em qualquer tentativa de substituí-lo por outro estritamente melhor, outra vaga terá que abrigar um estudante de desempenho inferior ou, pelo menos, continuar com o que tem.

Contudo, a universidade ainda pode ter interesse nessa troca, caso não se importe com qual estudante preenche qual vaga e, sim, com a turma ingressante formada como um todo. Roth concluiu que o algoritmo Gale-Shapley produz uma alocação estável entre universidades e estudantes, a melhor possível (dentre as estáveis) do ponto de vista do grupo que faz as propostas, mas não necessariamente ótima no sentido fraco de Pareto. Para vermos como isso ocorre, precisamos esclarecer como as universidades podem comparar turmas:

➥**Definição:** Universidades têm *preferências responsivas* quando, dentre duas turmas que diferem somente pela substituição de um aluno por outro, preferem a turma que contém o melhor desses dois alunos. (ROTH, 1985, p. 282; ROTH, SOTOMAYOR, 1990, p. 128)

A fim de exemplificar essa situação, tomamos o exemplo de Roth (1985, p. 283), em que temos um universo de universidades (com a quota de cada uma entre parênteses) e estudantes, sendo eles: Alfa (*A*) (2 vagas); Best (*B*) (1 vaga); Century (*C*) (1 vaga); Victor (*V*); Wilson (*W*); Xavier (*X*); Yuri (*Y*), com as seguintes listas de preferência:

Victor (*V*):	$C > A > B$	Alfa (*A*) (2):	$V > W > X > Y$
Wilson (*W*):	$B > A > C$	Beta (*B*) (1):	$V > W > X > Y$
Xavier (*X*):	$A > C > B$	Century (*C*) (1):	$X > V > W > Y$
Yuri (*Y*):	$A > B > C$		

Logo, a partir destas preferências, obtemos a seguinte alocação por Gale-Shapley quando as universidades fazem as propostas:

A (2):	$V > W > \boxed{X} > \boxed{Y}$	V:	$\boxed{C} > A > B$
B (1):	$V > \boxed{W} > X > Y$	W:	$\boxed{B} > A > C$
C (1):	$X > \boxed{V} > W > Y$	X:	$\boxed{A} > C > B$
		Y:	$\boxed{A} > B > C$

Esse resultado é considerado ótimo (dentre os estáveis) para as universidades. Vemos que *A* está emparelhada com suas 3ª e 4ª melhores inscrições, *B* e *C* estão cada uma com sua 2ª melhor inscrição, ao passo que os estudantes estão todos com sua 1ª opção de universidade. Em razão disso, resultaria o mesmo se os estudantes fizessem as propostas, e concluímos que se trata da única alocação estável.

Contudo, podemos, manualmente, formar uma nova alocação em que temos:

A (2):	$V > \boxed{W} > X > \boxed{Y}$	V:	$C > A > \boxed{B}$
B (1):	$\boxed{V} > W > X > Y$	W:	$B > \boxed{A} > C$
C (1):	$\boxed{X} > V > W > Y$	X:	$A > \boxed{C} > B$
		Y:	$\boxed{A} > B > C$

Dessa forma, *B* e *C* obtiveram um resultado melhor ao estarem cada uma emparelhada com o estudante que era sua 1ª escolha, enquanto que *A* também melhora, uma vez que, agora, substituiu o 3º estudante pelo 2º, embora mantenha o 4º. (Como vimos no capítulo anterior, com Roth, 1985, p. 286, note que *A* poderia manipular o resultado e obter essa alocação como proponente, publicando a lista falsa de preferência $W > Y > V > X$.)

Cabe citar um resultado de Roth; Sotomayor (1989, p. 567; 1990, teo. 5.26): com preferências responsivas e estritas entre estudantes, uma universidade pode comparar estritamente as turmas que obteria em diferentes alocações estáveis.

No mundo real, universidades privilegiam notas como critério de admissão, mas podem desejar grupos mais heterogêneos de estudantes, com diversidade de gênero, classes sociais, origem geográfica e internacionalização.

❖ Exercícios

1) Confira que o algoritmo Gale-Shapley produz o resultado indicado conforme as listas de preferência dadas, tanto com universidades propondo, como com estudantes propondo.

2) Verifique que o emparelhamento alternativo, apresentado por Roth, é instável.

Resposta: O par (A,X) bloqueia a alocação, porque $X >_A Y$ e $A >_X C$. Para satisfazê-lo, porém, *Y* teria que ir para *C*, o que pioraria a situação desta instituição.

3) As preferências responsivas permitem comparar quaisquer duas turmas? Dada a lista de alunos $W > X > Y > Z$, compare as seis possíveis turmas de dois alunos cada.

Resposta: Não há como comparar $\{W,Z\}$ com $\{X,Y\}$ (ROTH, 1985, p. 285). Para que a preferência seja responsiva, temos somente:

$$\{W,X\} > \{W,Y\} > \{W,Z\} \ ? \ \{X,Y\} > \{X,Z\} > \{Y,Z\}$$

4) Equipes sempre têm preferências responsivas?

Resposta: Não, porque uma empresa ou clube esportivo pode procurar, para sua equipe, profissionais que trabalhem melhor juntos, de modo que substituir um membro por outro mais qualificado ainda pode prejudicar o desempenho de seu parceiro e da equipe.
A teoria de alocação entre estudantes e universidades tem amplo interesse porque pode modelar também a formação de vínculo empregatício não só entre médicos residentes e hospitais, mas, em geral, entre trabalhadores e firmas. Contudo, é necessário incluir a questão de salários e, também, a hipótese de substitutabilidade que o exercício identifica: esse é o tema do Capítulo 6 de Roth; Sotomayor (1990).

5.4 Casos reais: residência médica e escolas públicas

A importância do algoritmo de Gale-Shapley e suas extensões é sua aplicação no mundo real. Um dos principais exemplos é a criação de um sistema de alocação de residentes em hospitais nos Estados Unidos, o NIMP (*National Intern Matching Program*), hoje chamado NRMP (*National Resident Matching Program*). Fazemos, aqui, uma apresentação do desenvolvimento desse sistema, baseada em Roth, Sotomayor (1990, p. 2-5), com detalhes extraídos dos artigos especializados Roth (1984) e Roth; Peranson (1999).

Depois, citamos alguns aspectos da alocação de estudantes em escolas públicas também em cidades americanas, com base nos artigos da premiação Nobel: Royal Swedish Academy of Sciences (2012a) e (2012b).

O mercado da residência médica

No começo do século XX, quando as residências em hospitais foram instituídas como forma de pós-graduação médica, existiam mais vagas que candidatos, de modo que o processo de escolha dos residentes pelos hospitais era muito competitivo. A primeira solução encontrada pelos hospitais nos Estados Unidos, a fim de obter os melhores estudantes, foi adiantar cada vez mais as propostas aos futuros residentes.

Consequentemente, nos anos 40, um estudante já tinha de escolher onde faria sua residência dois anos antes de graduar-se (quando, então, faria residência). Entretanto, esta estratégia não era realmente favorável para nenhum dos lados, pois os hospitais contratavam seus futuros residentes sem ao menos saber suas notas finais (ou seja, o desempenho em aula de seus dois últimos anos de formação), enquanto os alunos escolhiam os hospitais e programas de residência sem terem terminado seus estudos, de modo que o processo de aprendizado em si ficava subordinado aos resultados dos programas de residência pelas propostas dos hospitais.

Com o propósito de evitar tal situação, ajustes foram feitos pela *Association of American Medical Colleges* (AAMC), os quais determinaram que as propostas não deveriam ser feitas antes do fim do penúltimo ano de graduação, o que solucionou a situação desfavorável de acordos precoces.

Não obstante, continuaram a ocorrer problemas nesse mercado, porque nem todos os candidatos rapidamente decidiam aceitar ou não as propostas, devido ao fato de esperarem receber propostas melhores ou serem chamados em alguma lista de espera em um hospital mais preferível. Assim, a segunda alteração empregada foi a diminuição do prazo que um futuro residente tinha para decidir se aceitava ou não uma proposta.

Dentro dessa nova estratégia, os prazos foram cada vez mais reduzidos, até o momento em que, em 1950, se decidiu por um prazo de somente 12 horas.

Essa solução não foi eficiente devido ao fato de que funcionava mais como um mecanismo de pressão por escolhas e, portanto, de frustação para ambos os lados, do que um mecanismo que realmente considerasse os anseios e o direito de escolha de cada agente. Dessa forma, a partir desse ano, começaram as discussões em favor da necessidade de implementação de um sistema centralizado para alocação de residentes e hospitais nos Estados Unidos. Decidiu-se primeiro pela adoção de um sistema centralizado de forma experimental.

Esse sistema constituía-se da ordenação de listas de preferência que os estudantes elaboravam quanto aos hospitais a que eles mandavam suas propostas, ao passo que os hospitais também ordenavam os estudantes dos quais recebiam inscrições. Tais listas de preferência de ambos os grupos eram, então, submetidas a um escritório central, que determinava um emparelhamento com base em uma simulação de alocações prioritárias entre estudantes e hospitais (1º com 1º, 1º com 2º etc., não produzindo resultados estáveis).

A partir dos resultados experimentais do sistema centralizado, este começou a ocorrer de forma oficial; porém, a participação de estudantes e hospitais era voluntária. Entretanto, durante o experimento, o sistema já foi criticado pelos candidatos estudantes devido ao fato de promover alocações mais favoráveis aos interesses dos hospitais, em vista da ordem de alocação das prioridades, motivando os estudantes a serem "realistas" em suas preferências e identificar suas opções mais viáveis, não as mais desejadas, impondo-lhes um ônus contrapedagógico.

Assim, em 1951, esse algoritmo foi substituído por um novo, o NIMP, muito semelhante a Gale-Shapley, embora com os hospitais no que consideramos o papel de proponentes e os estudantes como seletores. Seu sucesso (medido pela longevidade do processo), mesmo em vista disso, deveu-se à produção de alocações estáveis. (Roth demonstrou que esse processo é mais complicado que o de Gale-Shapley, ainda que acabe produzindo a mesma alocação estável; veja Roth; Sotomayor, 1990, s. 5.4.)

Nas décadas seguintes, novos problemas apareceram. Um dos mais importantes, devido ao seu grande impacto no sistema, foi a situação conflituosa em que muitos casais de médicos não se inscreviam no sistema por desejarem estar próximos em suas alocações, o que tornava o processo instável em virtude do número crescente de estudantes (casais) e hospitais que faziam e aceitavam propostas por fora do sistema. Outro foi a dificuldade de hospitais em áreas rurais ou remotas obter residentes, imposta pelas preferências dos estudantes por grandes centros e inevitável, em vista da

propriedade que destacamos na seção anterior (as vagas não preenchidas são sempre as mesmas em qualquer alocação estável).

Por isso, foi necessário incluir-se uma nova opção no sistema. Até 1982, os casais de futuros residentes puderam se inscrever de forma conjunta a partir de um "algoritmo de casais". Ambos os membros do casal enviavam suas listas de preferências ao sistema, porém um deles era escolhido, por eles, como "membro líder", de forma que fosse o primeiro a ser alocado pelo sistema. Seu parceiro, ao invés de ser emparelhado da mesma forma, tinha, então, sua lista de preferências editada, a fim de excluir lugares distantes da opção obtida pelo membro líder. Desta maneira, o segundo membro seria alocado à melhor possibilidade de programa de residência de um hospital na vizinhança da opção do parceiro "líder" no programa de alocação.

Porém, uma tal alocação era provavelmente instável, porque o líder poderia obter uma posição boa, enquanto o parceiro acabava em uma opção ruim, ditada pela localidade (não necessariamente uma de suas melhores opções naquela localidade, já eliminadas também), enquanto o líder e o parceiro poderiam ser preferidos por outra localidade e tal alocação, para o líder, fosse perfeitamente aceitável, e, não, uma piora significativa.

A partir de 1983, então, cada casal pôde indicar uma única lista de preferências de pares de hospitais. Roth e Sotomayor, entretanto, descobriram que um tal cenário pode não ter soluções estáveis; Ronn concluiu que o próprio problema é computacionalmente complexo. Para ver a instabilidade, note que, se um membro do casal é rejeitado no processo, ambos se movem (como casal) à sua próxima opção de pares de hospitais, ou seja, o outro membro desiste em essência da vaga que tinha e o hospital desta vaga fica a lamentar as rejeições que, por causa desse membro, fez a outros estudantes não significativamente piores.

Nos anos 90, mudanças no financiamento do setor de saúde nos EUA afetaram o mercado de trabalho médico e, então, o de residência médica, fortalecendo discussões sobre o sistema de alocação. Duas questões foram destacadas: o privilégio dos hospitais como

grupo proponente e a possibilidade de os estudantes necessitarem estratégias “realistas” como grupo seletor. Para evitar um novo descrédito do programa central e a consequente desorganização crítica do mercado, propôs-se uma revisão do algoritmo. Roth e Elliott Peranson elaboraram o novo procedimento, que entrou em funcionamento em 1998.

O novo algoritmo é descrito por Roth; Peranson (1999, p. 756-757) e baseia-se em um algoritmo de Roth e Vande Vate para eliminar instabilidades uma a uma: muito resumidamente, trata-se de colocar novos candidatos em um conjunto de agentes proponentes, um por vez; realizar sua proposta a um hospital, que pode desencadear uma cadeia de propostas e rejeições pelos demais agentes como em Gale-Shapley e, também, rejeições extras de ou por casais de médicos ou pares de programas associados para 1º e 2º anos de residência; essas rejeições extras são armazenadas temporariamente e dirimidas após a cadeia principal.

Mesmo com a mudança para estudantes como grupo proponente e o tratamento homogêneo de casais, Roth e Peranson constataram que as alocações obtidas por este método eram pouquíssimo diferentes daquelas pelo método anterior, então oficial, utilizando-se os dados de alocação de cada ano. A esse respeito, resumimos o último parágrafo da Seção A (pág. 761) e sua nota de rodapé: apesar da diferença entre as alocações ótimas para hospitais e para estudantes diferirem em poucos agentes, para estes, a diferença é substancial; por um lado, um hospital (ou universidade em geral) pode não ver diferença entre seus candidatos classificados até mesmo várias posições em separado, enquanto um estudante pode não ter uma distinção clara entre suas primeiras duas opções, mas terá, com certeza, entre as várias opções, por sua localização em cidades distantes etc. (Os extremos ótimos serem tão próximos indica o pouco número de alocações estáveis relativo ao tamanho grande do mercado, o que é explicado na p. 768 como resultado de cada agente poder entrevistar-se com e avaliar poucas opções, em vista dos custos de viagem, tempo e administração.)

As matrículas nas escolas públicas

Dificuldades na matrícula de alunos em escolas públicas são uma ocorrência global. Até o começo do século XXI, os sistemas de alocação em várias cidades americanas sofriam problemas, enquanto tentavam alocar os alunos diretamente a suas primeiras opções de escola. Como se verificava em New York e Boston, a melhor estratégia do estudante era ser "realista".

Na cidade de New York, os alunos tinham um número limitado de opções de escola para indicar (cinco opções), enquanto as escolas decidiam quem aceitar, rejeitar ou pôr em espera também em um número limitado de rodadas (três rodadas), enquanto alunos e vagas não alocados nesse processo eram resolvidos posteriormente por um escritório. Desse modo, a tendência das escolas era selecionar os alunos que as indicassem em primeiro lugar, mas com o agravante de congestão. Mais especificamente, quantidades significativas de alunos eram matriculadas em escolas pelas quais não indicavam nenhuma preferência, enquanto as escolas não podiam considerar alunos suficientes durante sua seleção.

Em Boston, um procedimento centralizado já era usado desde a primeira etapa, porém tentando justamente matricular os alunos em suas primeiras opções, depois em suas segundas opções e assim sucessivamente.

> **Nota dos Autores:** Podemos observar que a tendência em alocar candidatos às melhores preferências como um "princípio da prioridade" (ou "aceitação imediata"), se não embutida já no *design* do processo, será de qualquer modo muito natural para os agentes seletores (por comodidade, narcisismo ou receio de perder o proponente), ou mesmo para o planejador central (por intuição e por baixo custo computacional). Contudo, esse princípio parece conduzir mais rapidamente à instabilidade: cf. o histórico acima e também Roth; Sotomayor (1990, s. 5.5.1.1) a respeito da história da alocação de residência médica no Reino Unido.

Convém destacar que as preferências das escolas (ou da administração central, isto é, do sistema como um todo) pelos alunos podem não ser explicitamente formuladas ou considerar somente desempenho em notas e frequência, mas acomodar outras considerações, como proximidade da escola à residência do aluno ou irmãos do candidato que já estudam na escola.

Alvin Roth e seus colegas trabalharam nos sistemas de New York e Boston a partir de 2003, implementando programas de matrícula baseados em Gale-Shapley com propostas realizadas pelos alunos, reduzindo sua necessidade de procurar por estratégias. Esses trabalhos envolvem, também, a adequação dos programas aos regulamentos ou normas de cada sistema.

6

O problema dos colegas de quarto

Nossas discussões sobre o problema do emparelhamento começaram por sua forma mais simplificada, o problema do casamento, em que se combinava cada homem a uma mulher (ou vice-versa), segundo as preferências de cada um. Depois, contemplamos sua forma generalizada no problema das admissões em universidades, porque, ao invés de combinar dois elementos (homens e mulheres), esta extensão permitia a combinação de um elemento de um grupo com vários de outro grupo, uma vez que cada universidade busca admitir uma quota de estudantes.

Nosso próximo passo é analisar o problema dos colegas de quarto, mais complexo devido ao fato de que não são grupos distintos que se combinam, mas cada pessoa ordena todas as outras segundo uma ordem de preferência, de forma que qualquer uma pode vir a ser colega de quarto.

➥**Definição:** Semelhantemente ao problema do casamento, diz-se que um emparelhamento é *instável* se houver duas pessoas que não estão pareadas entre si, mas que se preferem ao invés de seus atuais pares, de modo a formarem um *par de bloqueio*. Caso contrário, o emparelhamento é *estável*.

❖ **Exercício**

1) No problema de colegas de quarto, nem toda situação admite uma solução estável; mostre que é o caso das pessoas rotuladas como ■, 1, 2,..., M, sendo M ímpar, com listas de preferência satisfazendo estas condições: ■ tem uma lista qualquer; todos os demais listam ■ em último lugar; cada n entre 1 e $M - 1$ prefere $n + 1$ em primeiro lugar; M prefere 1 em primeiro. (Note o caráter cíclico das primeiras preferências.)

Resposta: Qualquer n que seja alocado a ■ prefere estar com qualquer outra pessoa, enquanto alguma delas também prefere n a seu parceiro atual, seja $n - 1$ (no caso $n > 1$) ou M (no caso $n = 1$), formando um par de bloqueio.

Para descrever o procedimento de alocação nos quartos, trabalharemos com um número par de indivíduos, de modo que possam ser combinados dois a dois. Comentaremos depois a respeito do caso ímpar, em que um agente será deixado sozinho, e das extensões do problema. Toda a apresentação baseia-se em Gusfield; Irving (1989).

6.1 Algoritmo para resolução

O início do processo é semelhante ao do problema de casamento, com cada pessoa fazendo proposta à sua primeira opção de pessoa como colega de quarto. Entretanto, diferentemente da situação do casamento, nesta situação, todas as pessoas fazem e recebem propostas. Por conseguinte, torna-se necessário que algumas entradas sejam removidas, como descreveremos a seguir. Então, novas listas de preferência, chamadas de *tabelas de preferência* (atualizadas a cada nova etapa do processo), são formadas sem tais entradas. Dessa forma, as exclusões das entradas servem para excluir possíveis pares de bloqueio das tabelas de preferência.

É importante ressaltar que, quando se exclui o par (X,Y), isto é, remove-se Y da lista de preferências de X, também é preciso

excluir o par (Y,X), de forma que X também seja removido da lista de Y. Portanto, não pode haver uma pessoa que, ao mesmo tempo em que esteja na lista de preferências de alguém, não o tenha em sua própria lista, isto é, cada membro de um possível par estável tem de permanecer na lista do outro membro.

↪**Notação e alerta:** Para denotar a remoção de uma pessoa na lista de preferências de outra, utilizamos o símbolo ^, da seguinte forma: se D é removido da lista de preferência de A, então:

$$A: \quad B > C > E > F > \hat{D}$$

Aqui, isso requer que A também seja removido da lista de preferência de D:

$$D: \quad E > \hat{A} > B > C > F$$

O processo chega ao fim quando se alcança uma das seguintes condições: (a) alguma lista de preferência se torna vazia, caso em que não há solução estável ou (b) cada lista é reduzida a uma única entrada, de modo que a associação correspondente é estável. Portanto, devido à condição (a), uma alocação de colegas de quarto a partir de um único grupo nem sempre admite solução estável.

A fim de exemplificar o passo a passo desse algoritmo, resolveremos detalhadamente o exemplo enunciado com apenas alguns passos por Gusfield; Irving (1989, p. 171).

Tal como nos problemas anteriores, o primeiro passo é que os agentes ordenem os demais participantes segundo uma ordem de preferências, porém, com a ressalva de que, nesta situação, cada agente tem de ordenar todos os outros. Assim, temos a seguinte tabela:

1: $8 > 2 > 9 > 3 > 6 > 4 > 5 > 7 > 10$
2: $4 > 3 > 8 > 9 > 5 > 1 > 10 > 6 > 7$
3: $5 > 6 > 8 > 2 > 1 > 7 > 10 > 4 > 9$
4: $10 > 7 > 9 > 3 > 1 > 6 > 2 > 5 > 8$
5: $7 > 4 > 10 > 8 > 2 > 6 > 3 > 1 > 9$
6: $2 > 8 > 7 > 3 > 4 > 10 > 1 > 5 > 9$
7: $2 > 1 > 8 > 3 > 5 > 10 > 4 > 6 > 9$
8: $10 > 4 > 2 > 5 > 6 > 7 > 1 > 3 > 9$
9: $6 > 7 > 2 > 5 > 10 > 3 > 4 > 8 > 1$
10: $3 > 1 > 6 > 5 > 2 > 9 > 8 > 4 > 7$

Como todos os agentes começam o algoritmo livres, cada um deles pode e faz uma proposta à primeira pessoa de sua lista. Consequentemente, a pessoa que fez a proposta deixa de ser livre e se torna *semicombinada* àquela que recebeu sua proposta, que, por sua vez, ou está livre ou está semicombinada com outra pessoa, a primeira em sua própria lista de preferências. Portanto, a relação de "semicombinação" não é simétrica.

➥**Notação e alerta:** Para denotar a semicombinação de A com B, utilizamos novamente a moldura $\square$ da seguinte forma em sua lista de preferência:

$$A:\ \boxed{B} > C > E > F > D$$

Isso significa que, como B é a primeira opção disponível de A, este propõe a ele, de forma que A está semicombinado a B. *Porém, aqui não é necessário que B esteja semicombinado a A, ou seja, que A esteja emoldurado na lista de preferência de B.*

Após a formação de um par semicombinado, são removidas as entradas imediatamente após o proponente na lista de preferência do receptor, ao serem agentes menos preferíveis.

Exemplo: Se a primeira opção de A é B, então, da lista de preferência de B, todas as pessoas após A devem ser removidas:

$$
\begin{aligned}
A&: \quad \boxed{B} > C > E > F > D \\
B&: \quad E > F > \mathbf{A} > \hat{C} > \hat{D}
\end{aligned}
$$

Consequentemente, B deve ser removido das listas dessas pessoas:

$$
\begin{aligned}
C&: \quad E > D > F > \hat{B} > A \\
D&: \quad E > A > \hat{B} > C > F
\end{aligned}
$$

De fato, ao removermos as pessoas menos preferíveis e seus pares correspondentes, B tem A como última opção, já que as opções posteriores foram superadas pela proposta de A. Logo, os pares (B,C) e (B,D) já não mais devem aparecer nas listas de B, C e D, devido à preferência de B por A.

Entretanto, ao considerarmos que cada pessoa de um possível par estável somente pode permanecer na lista de outra pessoa se ela mantém essa pessoa em sua própria lista, as remoções dos pares têm de ocorrer imediatamente após a formação da semicombinação. Em vista disso, se a primeira ou uma próxima opção de uma pessoa for removida, quando ela for fazer a proposta, essa opção removida já não mais aparece em sua lista (assim como ela não aparece na lista dessa opção), de forma que sua proposta é diretamente feita à opção seguinte.

Dessa forma, para que cada nova tabela de preferências formada seja estável, três condições devem ser respeitadas: (a) o agente, que é a primeira opção de par de uma pessoa, deve tê-la como última opção de par; (b) se o par (X,Y) não ocorre nas listas de X ou Y, então X prefere sua última opção a Y ou Y prefere sua última opção a X (de forma que este par já tenha sido removido) e (c) ninguém deve ter sua lista de preferência vazia.

Apliquemos isso às listas dadas:

1ª Rodada – propostas e remoções

Quando 1 propõe a 8, ele fica semicombinado a 8, então removem-se os agentes que aparecem depois de 1 na lista de preferências

de 8, a saber, 3 e 9. Não devemos nos esquecer que, como 3 e 9 foram removidos da lista de 8, então 8 também deve ser removido das listas de 3 e 9. Logo, 1, ao ser semicombinado com 8, faz com que os pares (8,3), (3,8), (9,8) e (8,9) sejam removidos. Ou seja:

$$\begin{array}{ll}
1: & \boxed{8} > 2 > 9 > 3 > 6 > 4 > 5 > 7 > 10 \\
3: & 5 > 6 > \hat{8} > 2 > 1 > 7 > 10 > 4 > 9 \\
8: & 10 > 4 > 2 > 5 > 6 > 7 > \mathbf{1} > \hat{3} > \hat{9} \\
9: & 6 > 7 > 2 > 5 > 10 > 3 > 4 > \hat{8} > 1
\end{array}$$

Analogamente, 2 é semicombinado com 4 (removem-se 5 e 8 da lista de 4 e 4 das listas de 5 e 8); 3 é semicombinado com 5 (removem-se pares de 5 com 1 e 9); 4 é semicombinado com 10 (removem-se pares de 10 com 7); 5 é semicombinado com 7 (removem-se pares de 7 com 10, 4, 6 e 9); 6 é semicombinado com 2 (removem-se pares de 2 com 7).

Com 7, a proposta parece um pouco diferente, pois, como se removeu sua primeira opção de sua lista de preferências, 2, a nova primeira opção de 7 é 1 (considere que as remoções ocorrem imediatamente após a formação das semicombinações), de modo que 7 faz uma proposta a 1 e, assim, é semicombinado a ele (removem-se pares de 7 com 10).

Ao continuarmos o processo de proposta, 8 faz uma proposta a 10, que já estava semicombinado com 4, de forma que 10 tem de escolher entre 4 e 8; como 8 é mais preferível que 4 em sua lista, 10 prefere 8. Assim, 8 é semicombinado com 10 (removem-se pares de 10 com 4 e 7, entretanto, com 7 não é necessário, pois já foi removido em momento anterior). Consequentemente, a semicombinação de 4 com 10 é quebrada e 4 torna-se livre.

Finalmente, 9 é semicombinado com 6 (não se remove pares) e 10 é semicombinado com 3 (removem-se pares de 3 com 4 e 10).

Em síntese, houve as seguintes propostas:

$1 \rightsquigarrow 8$	$4 \rightsquigarrow 10$	$8 \rightsquigarrow 10$
$2 \rightsquigarrow 4$	$5 \rightsquigarrow 7$	$9 \rightsquigarrow 6$
$3 \rightsquigarrow 5$	$6 \rightsquigarrow 2$	$10 \rightsquigarrow 3$
	$7 \rightsquigarrow 1$	

Com a formação de todas as semicombinações e seus pares a serem removidos, a nova tabela de preferências é:

$$
\begin{array}{ll}
1: & \boxed{8} > 2 > 9 > 3 > 6 > 4 > \hat{5} > 7 > \widehat{10} \\
2: & \boxed{4} > 3 > 8 > 9 > 5 > 1 > 10 > 6 > \hat{7} \\
3: & \boxed{5} > 6 > \hat{8} > 2 > 1 > 7 > 10 > \hat{4} > \hat{9} \\
4: & \widehat{10} > \hat{7} > 9 > \hat{3} > 1 > 6 > 2 > \hat{5} > \hat{8} \\
5: & \boxed{7} > \hat{4} > 10 > 8 > 2 > 6 > 3 > \hat{1} > \hat{9} \\
6: & \boxed{2} > 8 > \hat{7} > 3 > 4 > 10 > 1 > 5 > 9 \\
7: & \hat{2} > \boxed{1} > 8 > 3 > 5 > \widehat{10} > \hat{4} > \hat{6} > \hat{9} \\
8: & \boxed{10} > \hat{4} > 2 > 5 > 6 > 7 > 1 > \hat{3} > \hat{9} \\
9: & \boxed{6} > \hat{7} > 2 > \hat{5} > 10 > \hat{3} > 4 > \hat{8} > 1 \\
10: & \boxed{3} > \hat{1} > 6 > 5 > 2 > 9 > 8 > \hat{4} > \hat{7}
\end{array}
$$

2ª rodada – propostas e remoções

Os agentes que ficaram livres fazem uma nova proposta à melhor opção em sua lista que ainda não foi removida, enquanto os demais mantêm suas propostas.

Como somente 4 ficou livre, porque sua primeira opção recebeu uma proposta melhor, apenas ele fará uma nova proposta. Sua próxima opção é 9 (em vista das exclusões anteriores). Dessa forma, 4 faz uma proposta a 9 e é semicombinado a ele. Removem-se, então, os pares (9,1) e (1,9).

$1 \rightsquigarrow 8$	$4 \rightsquigarrow 9$	$8 \rightsquigarrow 10$
$2 \rightsquigarrow 4$	$5 \rightsquigarrow 7$	$9 \rightsquigarrow 6$
$3 \rightsquigarrow 5$	$6 \rightsquigarrow 2$	$10 \rightsquigarrow 3$
	$7 \rightsquigarrow 1$	

Com a modificação da semicombinação de 4 e as remoções da rodada anterior já apagadas, a nova tabela de preferências é:

1: $\boxed{8} > 2 > \hat{9} > 3 > 6 > 4 > 7$
2: $\boxed{4} > 3 > 8 > 9 > 5 > 1 > 10 > 6$
3: $\boxed{5} > 6 > 2 > 1 > 7 > 10$
4: $\boxed{9} > 1 > 6 > 2$
5: $\boxed{7} > 10 > 8 > 2 > 6 > 3$
6: $\boxed{2} > 8 > 3 > 4 > 10 > 1 > 5 > 9$
7: $\boxed{1} > 8 > 3 > 5$
8: $\boxed{10} > 2 > 5 > 6 > 7 > 1$
9: $\boxed{6} > 2 > 10 > 4 > \hat{1}$
10: $\boxed{3} > 6 > 5 > 2 > 9 > 8$

(Note a exclusão de 9, 1 nas listas de 1, 9, respectivamente.)

Esse processo continua enquanto houver alguma pessoa livre, cuja lista de preferências não esteja vazia, isto é, até que todas as pessoas façam suas propostas e fiquem semicombinadas a alguém, como ocorre nesta rodada em nosso exemplo.

Se houver alguma lista de preferências vazia depois das exclusões de pares, o problema não tem solução estável (lembrando que, aqui, se trata de um número par de pessoas).

Se ocorrer a existência de uma única entrada em cada lista de preferência, há uma única alocação estável possível entre os colegas de quarto, indicada pelas próprias listas. Isso porque, quando uma pessoa A foi removida da lista de outra B, também B foi removido da lista de A, então a única pessoa C na lista de A não pode ter removido A; pelo contrário, tem A como única entrada em sua lista, formando o par $A - C$. A estabilidade é garantida pelo mesmo raciocínio de Gale-Shapley, porque cada pessoa propôs sucessivamente a seu melhor candidato e só foi rejeitada quando este recebeu proposta melhor.

Contudo, se nenhuma dessas duas situações ocorrerem, então, o algoritmo passa para a sua próxima fase, de que falaremos a seguir.

No seu término, novamente, as duas situações acima também são possíveis, com as mesmas conclusões, mas, agora, as listas de preferências são reduzidas ao excluírem-se *rotações*. Logo, a solução encontrada depende da ordem com que se eliminam as rotações.

↪**Definição:** *Rotações* são ciclos que identificam as preferências comuns entre grupos de pessoas. Por exemplo, tome as listas de preferências de C e F:

$$C: E > D > \cdots$$
$$F: D > E > \cdots$$

Podemos perceber que E é a primeira opção de C e a segunda opção de F, assim como D é a segunda opção de C e a primeira opção de F, formando este diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & \overset{1^o}{\rightarrow} & E \\ 2^o\downarrow & & \uparrow 2^o \\ D & \underset{1^o}{\leftarrow} & F \end{array}$$

Girar o diagrama 180º permuta C com F e D com E, mas preserva a orientação e o rótulo de cada flecha, daí o nome "rotação".

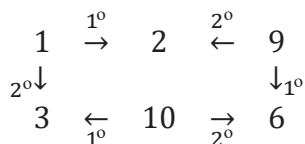
Ressaltamos que esses ciclos podem ser maiores ao abranger mais do que somente duas pessoas com preferências comuns, como veremos na segunda remoção.

↪**Propriedade:** No exemplo da definição, como C está semicombinado a E, então C é a última entrada na lista de preferência de E, após as remoções dos passos anteriores. Como E consta na lista de F, também F consta na lista de E, então concluímos que $F >_E C$. Caso D rejeite F, o par (F,E) passa a bloquear o par (C,E). Devemos, portanto, remover o par (C,E) e, por simetria, o par (F,D).

Ao observarmos a última tabela obtida, percebemos uma rotação entre as preferências de 1 e de 6, isto é, a primeira opção de um coincide com a segunda opção do outro e vice-versa. Assim, deve ser removida a primeira opção de cada pessoa, isto é, os pares (1,8) e (6,2), além dos seus correspondentes (8,1) e (2,6). Em consequência dessas exclusões, a primeira opção de 1 passa a ser 2 e, ao ser semicombinada a ela, devem ser removidos da lista de 2 os agentes menos preferíveis que 1, correspondendo aos pares (2,10) e (10,2) porque (2,6) e (6,2) já foram excluídos. Agora, porque 6 é semicombinado a 8, excluem-se também os pares (8,7) e (7,8). Efetuamos tais alterações na tabela:

$$\begin{array}{ll}
1: & \hat{8} > \boxed{2} > 3 > 6 > 4 > 7 \\
2: & \boxed{4} > 3 > 8 > 9 > 5 > 1 > \hat{10} > \hat{6} \\
3: & \boxed{5} > 6 > 2 > 1 > 7 > 10 \\
4: & \boxed{9} > 1 > 6 > 2 \\
5: & \boxed{7} > 10 > 8 > 2 > 6 > 3 \\
6: & \hat{2} > \boxed{8} > 3 > 4 > 10 > 1 > 5 > 9 \\
7: & \boxed{1} > \hat{8} > 3 > 5 \\
8: & \boxed{10} > 2 > 5 > 6 > \hat{7} > \hat{1} \\
9: & \boxed{6} > 2 > 10 > 4 \\
10: & \boxed{3} > 6 > 5 > \hat{2} > 9 > 8
\end{array}$$

Dessa forma, uma nova tabela de preferências é formada, na qual a próxima rotação observada ocorre entre 3 agentes, sendo eles 1, 9 e 10:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \overset{1^o}{\rightarrow} & 2 & \overset{2^o}{\leftarrow} & 9 \\
{}^{2^o}\downarrow & & & & \downarrow_{1^o} \\
3 & \underset{1^o}{\leftarrow} & 10 & \underset{2^o}{\rightarrow} & 6
\end{array}$$

Excluímos, então, a primeira opção de cada agente, sendo os pares (1,2), (9,6) e (10,3), não esquecendo seus correspondentes

(2,1), (6,9) e (3,10). Logo, 1 é agora semicombinado a 3 e precisam ser removidos os pares (3,7) e (7,3), porque os pares (3,10) e (10,3) já foram removidos, ao passo que, como 9 passa a ser semicombinado a 2, também são removidos os pares (2,5) e (5,2), porque os pares (2,1) e (1,2) já foram removidos. Já 10, por parear-se a 6, remove os pares (6,1), (1,6) (6,5) e (5,6), porque os pares (6,9) e (9,6) já foram removidos. Obtemos:

$$
\begin{array}{ll}
1: & \hat{2} > \boxed{3} > \hat{6} > 4 > 7 \\
2: & \boxed{4} > 3 > 8 > 9 > \hat{5} > \hat{1} \\
3: & \boxed{5} > 6 > 2 > 1 > \hat{7} > \hat{10} \\
4: & \boxed{9} > 1 > 6 > 2 \\
5: & \boxed{7} > 10 > 8 > \hat{2} > \hat{6} > 3 \\
6: & \boxed{8} > 3 > 4 > 10 > \hat{1} > \hat{5} > \hat{9} \\
7: & \boxed{1} > \hat{3} > 5 \\
8: & \boxed{10} > 2 > 5 > 6 \\
9: & \hat{6} > \boxed{2} > 10 > 4 \\
10: & \hat{3} > \boxed{6} > 5 > 9 > 8
\end{array}
$$

Nessa nova tabela de preferência, encontramos outra rotação, agora entre 1 e 2, de modo que os pares removidos são (3,1), (1,3), (2,4), (4,2), também (4,6) e (6,4) pela nova semicombinação 1 $\rightsquigarrow$ 4.

$$
\begin{array}{ll}
1: & \hat{3} > \boxed{4} > 7 \\
2: & \hat{4} > \boxed{3} > 8 > 9 \\
3: & \boxed{5} > 6 > 2 > \hat{1} \\
4: & \boxed{9} > 1 > \hat{6} > \hat{2} \\
5: & \boxed{7} > 10 > 8 > 3 \\
6: & \boxed{8} > 3 > \hat{4} > 10 \\
7: & \boxed{1} > 5 \\
8: & \boxed{10} > 2 > 5 > 6 \\
9: & \boxed{2} > 10 > 4 \\
10: & \boxed{6} > 5 > 9 > 8
\end{array}
$$

A rotação subsequente envolve 3 e 10. Assim, são removidos (3,5), (5,3), (10,6), (6,10), mais (5,8) e (8,5) pela nova semicombinação $10 \rightsquigarrow 5$.

1: $\boxed{4} > 7$
2: $\boxed{3} > 8 > 9$
3: $\hat{5} > \boxed{6} > 2$
4: $\boxed{9} > 1$
5: $\boxed{7} > 10 > \hat{8} > \hat{3}$
6: $\boxed{8} > 3 > \hat{10}$
7: $\boxed{1} > 5$
8: $\boxed{10} > 2 > \hat{5} > 6$
9: $\boxed{2} > 10 > 4$
10: $\hat{6} > \boxed{5} > 9 > 8$

Acima, ocorre uma rotação entre 8 e 9. Consequentemente, os pares (8,10), (10,8). (9,2) e (2,9) são removidos.

1: $\boxed{4} > 7$
2: $\boxed{3} > 8 > \hat{9}$
3: $\boxed{6} > 2$
4: $\boxed{9} > 1$
5: $\boxed{7} > 10$
6: $\boxed{8} > 3$
7: $\boxed{1} > 5$
8: $\hat{10} > \boxed{2} > 6$
9: $\hat{2} > \boxed{10} > 4$
10: $\boxed{5} > 9 > \hat{8}$

Na nova tabela formada, ainda ocorre rotação, entre 2 e 6, de forma que os pares (2,3), (3,2), (6,8) e (8,6) são removidos.

1: $\boxed{4} > 7$
2: $\hat{3} > \boxed{8}$
3: $\boxed{6} > \hat{2}$
4: $\boxed{9} > 1$
5: $\boxed{7} > 10$
6: $\hat{8} > \boxed{3}$
7: $\boxed{1} > 5$
8: $\boxed{2} > \hat{6}$
9: $\boxed{10} > 4$
10: $\boxed{5} > 9$

Por fim, percebemos uma última rotação entre 4, 7 e 10; removem-se, então, os pares (4,9), (9,4), (7,1), (1,7), (10,5) e (5,10).

$$
\begin{array}{ll|ll}
1: & \boxed{4} > \hat{7} & 6: & \boxed{3} \\
2: & \boxed{8} & 7: & \hat{1} > \boxed{5} \\
3: & \boxed{6} & 8: & \boxed{2} \\
4: & \hat{9} > \boxed{1} & 9: & \boxed{10} > \hat{4} \\
5: & \boxed{7} > \hat{10} & 10: & \hat{5} > \boxed{9}
\end{array}
$$

Após as eliminações, resta apenas um agente em cada lista de preferência e, pelo mesmo motivo que argumentamos ao final da primeira etapa, os agentes remanescentes combinam-se aos pares de modo estável:

$$
\begin{array}{ll|ll}
1: & \boxed{4} & 6: & \boxed{3} \\
2: & \boxed{8} & 7: & \boxed{5} \\
3: & \boxed{6} & 8: & \boxed{2} \\
4: & \boxed{1} & 9: & \boxed{10} \\
5: & \boxed{7} & 10: & \boxed{9}
\end{array}
$$

Portanto, obtivemos um emparelhamento estável com os pares: 1 – 4, 2 – 8, 3 – 6, 5 – 7 e 9 – 10.

Variantes

Prometemos relatar como uma solução para o problema dos colegas de quarto deve ser procurada em três casos: um número ímpar de agentes; listas de preferência incompletas em vista de opções inaceitáveis; listas de preferência com indiferença. Gusfield; Irving (1989) explicam as adaptações necessárias em suas três Seções 4.5.1, 4.5.2, e 4.5.3, respectivamente, que resumimos aqui.

No caso de um número ímpar de pessoas a combinar duas a duas, em qualquer emparelhamento alguma deverá sobrar sem colega de quarto. Convenciona-se que essa pessoa solitária ocasiona um bloqueio se for a preferida de uma outra com relação ao colega de quarto desta. Mostra-se que, então, em todos os emparelhamentos estáveis (se houver) para um mesmo cenário de listas de

preferência, a mesma pessoa permanece solitária e ela é identificada como a única cuja lista aparece vazia ao final da primeira etapa do algoritmo. Após sua remoção, a segunda etapa pode ser aplicada ao número par de agentes restantes (que determinará se uma solução estável existe ou não).

No caso de listas incompletas, quando há soluções estáveis, mostra-se que cada pessoa participante ou sempre consegue algum colega em todos os emparelhamentos estáveis, ou sempre resta solitária, sendo que as pessoas solitárias são identificadas com suas listas de preferência esvaziadas após a primeira etapa do algoritmo. Também após a remoção destas pessoas, a segunda etapa determina a existência ou não de uma solução estável.

Finalmente, no caso de indiferenças, podemos substituir o símbolo “≡” pelo símbolo “>” em cada lista e, então, proceder com o algoritmo. Contudo, como o problema dos colegas de quarto nem sempre tem solução, é concebível que uma escolha aleatória da nova ordem estrita entre agentes equivalentes não produza um emparelhamento estável, enquanto outra sim. Pode-se identificar todas essas possíveis escolhas e combiná-las, para testar cada conjunto de listas de preferência estrita até encontrar um que admita solução estável. Tal processo, entretanto, é muito ineficiente, porque a quantidade de combinações a tratar pode crescer exponencialmente em função do número de agentes envolvidos. Certamente pode haver uma saída mais inteligente, mas mostra-se que o próprio problema, em um sentido formal, é computacionalmente complexo.

6.2 Relação com o problema do casamento

Suponha que começamos com um problema de casamento entre grupos de mesmo número de homens e mulheres, com listas completas. Ao *final* de cada lista de preferência de um homem (ou mulher), acrescente os demais homens (ou mulheres, respectivamente) em uma ordem arbitrária, obtendo listas de preferência para um problema de colegas de quarto.

Por um lado, qualquer emparelhamento estável entre os grupos de homens e mulheres, como solução ao problema do casamento, também é estável como solução para esse problema de colegas de quarto: não há pares de bloqueio formados por um homem e uma mulher (já que, se existissem, bloqueariam os casamentos originais), nem pares formados por dois homens ou duas mulheres, porque cada membro foi colocado, na lista do outro, após seu parceiro.

Por outro, não pode haver qualquer novo emparelhamento estável: se houver dois homens em um quarto e duas mulheres em outro, bastará formar um par qualquer com um desses homens e uma dessas mulheres para bloquear o emparelhamento, já que se preferirão entre si em relação aos colegas de quarto que vêm no final de suas listas.

Assim, como sempre há uma alocação estável entre homens e mulheres, se realizarmos o procedimento acima, então obteremos um emparelhamento dentro da união dos conjuntos de homens e mulheres, que de fato combina homens a mulheres e é uma solução estável para o problema de casamento. Exceto por saber-se de antemão que o problema do casamento pode ser sempre resolvido, esta é uma pequena redução ao problema de colegas de quarto. (GUSFIELD; IRVING, 1989, lema 4.1.1.)

Enquanto a primeira parte do algoritmo dos colegas de quarto, referente às propostas dos indivíduos, é semelhante ao mecanismo *deferred acceptance* de resolução do problema do casamento, a segunda parte é nova, ao utilizar um outro procedimento intitulado *minimal differences* ("diferenças mínimas").

É esse o algoritmo responsável pela eliminação das rotações, que reduz as listas de preferência até que ou alguma lista se torne vazia, caso em que não há solução estável, ou cada lista seja reduzida a uma única entrada, de modo que a associação correspondente é estável. Contudo, como há várias ordens em que as rotações podem ser identificadas e escolhidas para serem eliminadas, o emparelhamento obtido não precisa ser único (em contraste com Gale-Shapley no problema do casamento). Por outro lado, as rotações ocorrem também no problema do casamento e são instrumentais em investigações mais avançadas.

A matrícula em disciplinas na UFABC

Siglas utilizadas:

UFABC:	Universidade Federal do ABC
ConsEPE:	Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão da UFABC
CP:	Coeficiente de progressão no bacharelado interdisciplinar
CP_k:	Coeficiente de progressão no curso de formação específica
CR:	Coeficiente de rendimento
ProGrad:	Pró-reitoria de Graduação da UFABC

Com base em seu sucesso no cotidiano como a alocação de alunos em escolas, propomos aplicar o algoritmo Gale-Shapley ao processo de matrícula dos alunos nas disciplinas da graduação da Universidade Federal do ABC (UFABC). Primeiramente, devemos entender como o processo de alocação de cada aluno em turmas de várias disciplinas ocorre atualmente na instituição.

É preciso atentar para o significado preciso dos termos *disciplina* e *turma*. A disciplina é um volume de conhecimento a ser coberto em um ciclo letivo e é comumente conhecida como "matéria" ou "curso", embora um *curso* seja uma formação de vários ciclos e disciplinas (bacharelado, licenciatura etc.). A turma, ou "sala", identifica o local, os horários, o ministrante e o grupo de alunos envolvidos nessa realização da disciplina.

7.1 O método contemporâneo

Todo ano, os coordenadores dos cursos planejam as disciplinas que serão ofertadas nos três quadrimestres letivos, sendo que, especificamente em cada quadrimestre, eles comunicam se houve alguma mudança. Tais dados são lançados no sistema chamado "de associação", que tem como função alimentar um outro sistema, o "de alocação", o qual aloca as disciplinas ofertadas em salas de aula (primeiro as disciplinas que utilizam os laboratórios e, depois, as que ocorrem em salas). Com tal combinação, as turmas são criadas para, então, serem estipuladas a quantidade de vagas e horários que cada turma de determinada disciplina terá, segundo a escolha dos coordenadores de cada curso.

Uma vez que as turmas são formadas e estabelecidas no sistema de alocação, este é vinculado a um terceiro sistema, denominado "de matrículas", que, em época de matrícula (durante o quadrimestre anterior ao qual os alunos irão se matricular), libera o acesso dos alunos, por um tempo determinado, aos dados e turmas disponíveis para que esses alunos possam matricular-se nas turmas das disciplinas que desejam cursar.

Neste sistema, as disciplinas estão organizadas em ordem alfabética segundo o bacharelado a que pertencem (interdisciplinar ou específico) e são listados o código, nome, turma e horário da disciplina, assim como o número máximo de vagas e quantos estudantes já se inscreveram nessa turma. Entretanto, um estudante pode escolher turmas que já têm o número máximo de inscritos, uma vez que o processo de escolha e eliminação é feito depois que todos se matricularam, de modo que a ordem de chagada não interfira na matrícula.

Simultaneamente às matrículas que o aluno está fazendo, o próprio sistema verifica o número de créditos em que esse aluno está se matriculando, uma vez que cada aluno tem um número máximo de créditos que pode cursar de acordo com o seu CR (resolução ConsEPE nº 131). Além disso, o sistema verifica se, por algum erro, o aluno não se matriculou em horários conflitantes ou em

disciplinas iguais de turmas ou horários diferentes, de forma que, se algum desses conflitos ou limites forem transgredidos, o sistema impede a conclusão da matrícula do aluno.

Todos os alunos podem modificar suas escolhas quantas vezes quiserem enquanto o sistema estiver aberto, porém quando o período de matrícula termina, o sistema não permite mais o acesso, e, consequentemente, a matrícula dos alunos. Seus pedidos de matrículas são, então, enviados aos coordenadores de cada curso, que analisam tais dados a fim de verificar a necessidade de modificações, como, por exemplo, de eliminação de turmas, aumento de vagas ou criação de novas turmas. Esse ajuste é informado à Pro-Grad, que reconfigura todos os sistemas citados anteriormente, de modo que as modificações sejam incluídas no sistema de matrículas.

Nas turmas com mais matrículas do que vagas, determinam-se quais alunos têm seu pedido atendido segundo critérios específicos para cada tipo de disciplina: nas disciplinas obrigatórias dos bacharelados interdisciplinares (no quadrimestre ideal), aqueles alunos com turno de entrada correspondente e melhor CR, e, nas demais disciplinas, aqueles alunos com turno de entrada correspondente, reserva de vaga e melhor CP_k (resolução ConsEPE nº 31).

Assim, cada turma tem, pelo sistema, uma relação dos nomes dos alunos matriculados, sendo que cada um deles tem suas informações (se tem a reserva de vaga, o turno, CR, CP, dentre outros) analisadas pela ProGrad manualmente segundo os critérios acima.

A partir desses dados, a ProGrad disponibiliza as matrículas indeferidas, isto é, disciplinas em que os alunos não conseguiram se matricular. Em seguida, somente os alunos com matrículas indeferidas têm acesso ao sistema de matrículas novamente, no período denominado "ajuste", em que se matriculam em outras disciplinas ou turmas no lugar daquelas em que não conseguiram ser admitidos. Porém, as matrículas bem-sucedidas na etapa anterior continuam alocadas. Nesta etapa do processo, o critério para a aprovação da matrícula é a ordem de chegada.

Depois, ocorre um segundo período de ajuste, no qual agora se permite o acesso de todos os alunos para que tenham a chance de, se

desejarem ou tiverem a necessidade, modificar alguma das turmas em que se matricularam. Mais uma vez, a ordem de preferência pelas vagas em cada turma é determinada pela ordem de chegada de cada aluno; também ocorre a inclusão de novas disciplinas criadas anteriormente pelos coordenadores de curso, a fim de que todos os alunos tenham as mesmas chances de selecioná-las. Quando esse sistema fecha o acesso aos alunos, encerram-se os períodos de matrícula e ajuste para o quadrimestre seguinte.

Destacamos que a primeira matrícula dos ingressantes ocorre para seu segundo quadrimestre (no primeiro quadrimestre, todos os alunos foram inscritos pela ProGrad), ainda na vigência do primeiro quadrimestre, quando os alunos não possuem CP ou CR. Por isso, a ProGrad determina que, no sistema de matrícula, esses alunos tenham reserva de vagas nas disciplinas que seriam obrigatórias a eles em seu segundo quadrimestre. É permitido que esses alunos, no ajuste, também selecionem outras disciplinas.

Antes de ser estabelecido esse método de matrícula, e como não havia sistema informatizado, a UFABC realizava o processo de matrícula manualmente, dado que eram poucos alunos e disciplinas na universidade: somente 15 turmas em 2007, comparando-se a aproximadamente 900 em 2014. Além disso, não era necessário eliminar matrículas devido à pequena quantidade de alunos.

7.2 Nossa proposta

A automação do sistema de matrícula da UFABC é um tópico de pesquisa industrial, tanto no desenvolvimento de uma solução algorítmica, como na sua implementação informatizada. Nosso objetivo é aproveitá-lo como exemplo das ideias que apresentamos neste livro e como motivação para o leitor realizar adaptações a suas próprias questões.

Nesta seção, propomos um procedimento simplificado para a matrícula, que utiliza o algoritmo de Gale-Shapley (na versão adequada para o "problema das admissões em universidades"). Sem

dúvida, uma implementação experimental e desenvolvimentos posteriores poderão sanar dificuldades não consideradas aqui. Seguiremos a explanação com um exemplo diminuto.

A proposta não contempla diversas normas da UFABC com respeito a reservas de vagas ou limites de carga horária, embora essas normas possam ser oportunamente observadas em um programa mais detalhado. A esse respeito, somente assumiremos que (a) sejam ofertadas vagas e turmas em número suficiente e horários compatíveis para atender à demanda regular das disciplinas e que (b) haja uma classificação final entre alunos, para ser utilizada como lista de preferência da universidade, potencialmente obtida dos coeficientes de rendimento e progressão e variada entre disciplinas.

Por outro lado, fazemos uso explícito de uma distinção do plano pedagógico da instituição: a liberdade do aluno em cursar disciplinas de sua escolha e na ordem e na quantidade que quiser, embora haja matrizes curriculares recomendadas e requerimentos para a obtenção dos graus disponíveis. Enquanto é essa liberdade (e consequente imprevisibilidade) que torna o sistema de matrículas da UFABC um problema complexo, vemo-la também como uma possibilidade para sua solução.

Nossa proposta é que o aluno especifique uma *ordem de preferência* entre as disciplinas que deseja cursar, podendo dar preferência a uma disciplina que necessita para colação de grau, ou a um conteúdo com o qual tem mais dificuldade, ou a um assunto favorito etc. Essa ordenação não deve ser relevante no cumprimento das matrizes ideais, conquanto haja oferta suficiente e compatível de vagas e horários.

Primeira Etapa – coleta das informações dos alunos

No período de matrícula, um formulário eletrônico deverá ser disponibilizado aos alunos. Após *login* com identificação e senha, será exibida uma primeira página com listas de opções, pedindo: "Selecione sua primeira disciplina, em ordem de prioridade". Após a seleção, a página identificará as turmas oferecidas (com local, horários, ministrante etc.), pedindo: "Selecione sua 1ª opção de turma";

“Selecione sua 2ª opção de turma”; “Selecione sua 3ª opção de turma”; ... sem limitação do número de opções.

Concluída essa seleção, será exibida uma página semelhante, pedindo pela seleção da segunda disciplina e, então, as seleções das turmas oferecidas como 1ª opção, 2ª opção, 3ª opção etc.

O processo será repetido para quantas disciplinas o aluno tiver interesse, bloqueando, em cada caso, a escolha de disciplinas ou turmas já escolhidas.

Segunda Etapa – aplicação do algoritmo

Para compreensão desta etapa, observamos que as *disciplinas* serão tratadas em ordem de preferência: inicialmente, a disciplina colocada em primeiro por cada aluno, como se ele houvesse escolhido somente essa disciplina (ainda que alunos diferentes escolham disciplinas diferentes), depois a disciplina colocada em segundo e assim por diante.

Para n de 1 em diante:

- listamos as opções de preferência de turma de cada aluno, referentes à sua n-ésima escolha de disciplina;
- emparelhamos alunos e turmas segundo essas opções de preferência, segundo Gale-Shapley, com os alunos propondo às turmas (que têm suas listas de preferência providas pela instituição);
- para cada aluno que tenha tido uma turma alocada, eliminamos as opções de turmas para suas disciplinas escolhidas subsequentemente – a $(n + 1)$-ésima, a $(n + 2)$-ésima etc. – cujos horários conflitam com o da turma alocada.

Em vista do último passo, é importante que o aluno já escolha horários compatíveis entre turmas ou identifique um número suficiente de turmas para cada disciplina, para que encontre vaga em horário compatível.

Note que, no primeiro passo, as vagas de uma determinada disciplina não devem ser imediatamente esgotadas, exceto se o total de

alunos (para os quais se criem vagas) já a selecione imediatamente como prioridade. É praticamente certo, porém, que os alunos que identificarem uma disciplina com mais prioridade esgotem as vagas das turmas mais cobiçadas dessa disciplina. Após o exemplo, relatamos outras observações.

Exemplo: Trabalharemos com cinco alunos A, B, C, D e E; três disciplinas X, Y e Z; duas turmas de cada disciplina, identificadas com os índices D e N; cada turma com duas vagas; e dois conflitos de horário, X_D com Z_D e X_N com Y_N.

Por exemplo, o aluno A determina sua lista de preferência da seguinte forma: ele considera prioritário conseguir se matricular na disciplina X, da qual prefere a turma X_N à turma X_D. Depois, considera cursar a disciplina Z, preferindo a turma Z_N à turma Z_D, e, por fim, escolhe cursar a disciplina Y, preferindo a turma Y_N à turma Y_D. Sendo assim:

A:	1ª:	X:	$X_N > X_D$
	2ª:	Z:	$Z_N > Z_D$
	3ª:	Y:	$Y_N > Y_D$

Enquanto isso, o aluno B, ao fazer sua própria lista, ordena cada disciplina de modo que escolhe como sua prioridade a disciplina X, sendo que prefere a turma X_D à turma X_N. Em seguida, deseja se matricular na disciplina Y, tendo preferência pela turma Y_N à turma Y_D. Sua terceira escolha de disciplina é, então, a disciplina Z, que prefere cursar na turma Z_N e, depois, na turma Z_D. Ou seja:

B:	1ª:	X:	$X_D > X_N$
	2ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
	3ª:	Z:	$Z_N > Z_D$

Dessa forma, seguem-se as listas de preferência de cada aluno pelas turmas ofertadas:

A:	1ª:	X:	$X_N > X_D$
	2ª:	Z:	$Z_N > Z_D$
	3ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
B:	1ª:	X:	$X_D > X_N$
	2ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
	3ª:	Z:	$Z_N > Z_D$
C:	1ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
	2ª:	X:	$X_N > X_D$
	3ª:	Z:	$Z_D > Z_N$
D:	1ª:	X:	$X_D > X_N$
	2ª:	Z:	$Z_D > Z_N$
	3ª:	Y:	$Y_D > Y_N$
E:	1ª:	X:	$X_D > X_N$
	2ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
	3ª:	Z:	$Z_N > Z_D$

Ao passo que a universidade tem sua própria classificação dos alunos, em conformidade com os dados de todos os alunos da instituição em determinado critério (média de notas etc.). A título de exemplo, indicamos uma classificação uniforme para todas as turmas:

Classificação dos alunos: $D > A > B > E > C$

O próximo passo é a proposta dos alunos à disciplina de sua primeira escolha: A, B, D, E deverão ser emparelhados com as turmas da disciplina X, enquanto C deve ser emparelhado com as turmas da disciplina Y. Formamos, então, as seguintes listas de preferência para utilizarmos o algoritmo de Gale-Shapley:

$$
\begin{array}{ll}
A: & X_N > X_D \\
B: & X_D > X_N \\
C: & Y_N > Y_D \\
D: & X_D > X_N \\
E: & X_D > X_N
\end{array}
$$

1ª Rodada da alocação da primeira disciplina

$$A \rightsquigarrow X_N,\ B \rightsquigarrow X_D,\ C \rightsquigarrow Y_N,\ D \rightsquigarrow X_D,\ E \rightsquigarrow X_D$$

Com esta primeira rodada, A propõe à turma X_N, que, por ter vagas disponíveis, aceita sua matrícula. O mesmo acontece com C, que propõe a Y_N. Entretanto, B, D e E escolhem todos propor à turma X_D, de modo que, por haver mais solicitações do que vagas disponíveis, a universidade utiliza o critério de classificação dos alunos. Sendo assim, B e D conseguem matricular-se nesta turma, enquanto E é rejeitado na rodada:

$$X_D - \{B, D\},\ X_N - A,\ Y_N - C$$

2ª Rodada da alocação da primeira disciplina

$$E \rightsquigarrow X_N$$

Na rodada seguinte, os alunos que não foram alocados em nenhuma turma serão alocados à sua opção subsequente de turma preterida da primeira disciplina escolhida. Por isso, E propõe à sua segunda opção, a turma X_N, que aceita sua matrícula por ter vagas disponíveis:

$$X_D - \{B, D\},\ X_N - \{A, E\},\ Y_N - C$$

Note que realizamos uma execução completa do algoritmo Gale-Shapley, o que finaliza a alocação nas disciplinas de prioridade

mais alta dos alunos. Durante essa execução, poderia ter havido "troca" de alunos em uma turma, caso uma turma já completada "preferisse" um aluno novo aos que já tem; isso apenas não ocorreu no exemplo. Porém, entre diferentes execuções, os alunos já matriculados não serão rejeitados, como veremos na última alocação.

Agora é preciso excluir, nas listas de preferências dos alunos (da segunda disciplina em diante), as turmas cujos horários conflitam com a primeira turma alocada a cada aluno. Também é preciso diminuir o número de vagas das turmas parcialmente preenchidas e excluir as turmas que já estão com todas as suas vagas preenchidas (embora viole o princípio dos melhores classificados em cada turma). Assim, nas listas de C são excluídas as turmas X_N e X_D (já preenchidas); nas listas de D é excluída a turma Z_D (em conflito com X_D); nas listas de E é excluída a turma Y_N (em conflito com X_N). Note que C, então, tem sua 2ª lista original esvaziada e substituída imediatamente pela 3ª (cf. exercício ao final do exemplo). A turma Y_N passa a ter uma única vaga, porque já tem C matriculado.

A:	2ª:	Z:	$Z_N > Z_D$
	3ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
B:	2ª:	Y:	$Y_N > Y_D$
	3ª:	Z:	$Z_N > Z_D$
C:	"2ª":	Z:	$Z_D > Z_N$
D:	2ª:	Z:	Z_N
	3ª:	Y:	$Y_D > Y_N$
E:	2ª:	Y:	Y_D
	3ª:	Z:	$Z_N > Z_D$

Em seguida, iniciam-se as propostas dos alunos às turmas das segundas disciplinas escolhidas, também por Gale-Shapley, com estas listas de preferência:

$$
\begin{array}{ll}
A: & Z_N > Z_D \\
B: & Y_N > Y_D \\
C: & Z_D > Z_N \\
D: & Z_N \\
E: & Y_D
\end{array}
$$

Alocação da segunda disciplina

$$A \rightsquigarrow Z_N,\ B \rightsquigarrow Y_N,\ C \rightsquigarrow Z_D,\ D \rightsquigarrow Z_N,\ E \rightsquigarrow Y_D$$

No processo de alocação da segunda disciplina, todos os alunos conseguem ser matriculados logo na primeira opção remanescente, lembrando que C, na verdade, não é matriculado na disciplina X que era sua segunda prioridade original. Obtemos:

$$Y_D - E,\ Y_N - \{C_{\text{anterior}}, B\},\ Z_D - C,\ Z_N - \{A, D\}$$

Com o fim da segunda etapa, é necessário que novamente sejam excluídas as opções de turmas nas disciplinas seguintes (aqui só havendo a terceira disciplina de cada aluno) que conflitam com as turmas já alocadas aos alunos ou já fechadas (sem vagas). Desse modo, a turma Y_N é excluída das listas de A e D, enquanto a turma Z_N é excluída das listas de B e E, por não terem mais vagas disponíveis. A turma Z_D passa a ter uma única vaga. O aluno C já não tem mais disciplinas em sua lista. Restam estas preferências:

$$
\begin{array}{llll}
A: & 3^{a}: & Y: & Y_D \\
B: & 3^{a}: & Z: & Z_D \\
D: & 3^{a}: & Y: & Y_D \\
E: & 3^{a}: & Z: & Z_D
\end{array}
$$

Rodadas da alocação da terceira disciplina

$$A \rightsquigarrow Y_D, B \rightsquigarrow Z_D, D \rightsquigarrow Y_D,\ E \rightsquigarrow Z_D$$

A e D propõem a Y_D, mas ao haver somente uma vaga disponível na turma, a universidade escolhe alocar D, por ser melhor aluno segundo o critério determinado para a preferência entre os alunos. Note que E mantém sua vaga em Y_D, em detrimento de A, porque a selecionou anteriormente. Entre B e E a mesma situação ocorre, pois ambos propõem a mesma turma, Z_D, que já contém C. Deste modo, por haver uma vaga disponível na turma, a universidade escolhe o melhor aluno B. Obtemos:

$$Z_D - \{C_{\text{anterior}}, B\}, \;\; Y_D - \{E_{\text{anterior}}, D\}$$

Como havia três disciplinas na lista de prioridade de cada aluno, executamos o algoritmo de Gale-Shapley três vezes e o procedimento proposto está completo. Obtivemos como resultado as seguintes alocações, que podem ser vistas em dois formatos:

matrículas dos alunos	**listas de presença**
$A - \{X_N, Z_N\};$	$X_D - \{B, D\};$
$B - \{X_D, Y_N, Z_D\};$	$X_N - \{A, E\};$
$C - \{Y_N, Z_D\};$	$Y_D - \{D, E\};$
$D - \{X_D, Y_D, Z_N\};$	$Y_N - \{B, C\};$
$E - \{X_N, Y_D\};$	$Z_D - \{B, C\};$
	$Z_N - \{A, D\};$

❖ Exercício

1) Refaça as alocações acima sem adiantar a matrícula de C na etapa da 2ª disciplina (isto é, C não participa desta etapa e mantém a lista $Z_D > Z_N$ para a terceria etapa) e verifique que a solução é alterada, tanto em sua matrícula como na dos colegas.

Resposta: Uma vaga em Z_D passa de C para E. Isso mostra que regras claras precisam ser refletidas nas especificações de um algoritmo. A alocação completa fica:

matrículas dos alunos	listas de presença
$A - \{X_N, Z_N\}$;	$X_D - \{B, D\}$;
$B - \{X_D, Y_N, Z_D\}$;	$X_N - \{A, E\}$;
$C - Y_N$;	$Y_D - \{D, E\}$;
$D - \{X_D, Y_D, Z_N\}$;	$Y_N - \{B, C\}$;
$E - \{X_N, Y_D, Z_D\}$;	$Z_D - \{B, E\}$;
	$Z_N - \{A, D\}$;

Observações: Este problema é muito semelhante ao de casais de estudantes na residência médica, como explicamos na Seção 5.4, com a consideração de que um aluno pode pleitear matrícula em várias disciplinas. No todo, portanto, não deve ter soluções estáveis e deve ser computacionalmente complexo.

Nossa solução é a mesma adotada pelo NIMP para casais até 1982, com a seleção de uma disciplina "líder" e outras em ordem de prioridade, e oferece a mesma razão para o surgimento de instabilidades: talvez uma turma considerada um pouco pior para a primeira disciplina tivesse horário compatível com uma turma mais desejada para a seguinte.

Contudo, a solução adotada em 1983 (listas de opções conjuntas, isto é, pares de hospitais) corresponde, aqui, a pedir que os estudantes elaborem várias opções de grade horária (conjuntos de turmas). Fazê-lo a cada quadrimestre encarregaria os estudantes de um peso sobre-humano e poderia induzi-los a listar poucas opções, trazendo potencial congestão ao sistema.

Uma solução preliminar, em execuções experimentais da formulação acima, seria estimular ou requerer que o aluno "em fase" (isto é, seguindo a matriz curricular sugerida) liste as disciplinas competentes em certa ordem.

Outra, mais apropriada, pode ser o não congelamento das matrículas realizadas em etapas anteriores, com a aplicação do algoritmo Roth-Vande Vate para retornar a tais etapas e refazer a alocação dos alunos rejeitados, procurando eliminar instabilidades.

Antes da execução do algoritmo, vale notar, podem ser acomodadas situações de emergência, matriculando diretamente e descontando os totais de vagas nas turmas, ou remodelando as preferências da instituição.

Bibliografia comentada

Na literatura acadêmica e científica, existe um padrão rigoroso de citação dos trabalhos consultados para a elaboração de um texto ou que o fundamentam, não bastando sua listagem em uma bibliografia, mas também ao longo do texto e junto às informações utilizadas.

Nossa exposição evitou um excesso dessas referências formais para preservar o fluxo de leitura de nosso público, com o entendimento de que as técnicas utilizadas são parte da tradição matemática. Contudo, cumpre-nos identificar e apresentar nossas diversas fontes:

BROWN, J.; SHERBERT, D. *Introductory linear algebra with applications*. PWS, 1984.

Apresenta a álgebra linear, um campo da matemática universitária extremamente útil para outras teorias e para as ciências e engenharias. Os problemas de otimização linear e o método *Simplex* são exemplificados com boa abrangência.

GALE, D.; SHAPLEY, L. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly,* v. 69, n. 1, p. 9-15, 1962.

É o artigo que originou toda a teoria que apresentamos. Além do próprio algoritmo, ele já contém diversas informações importantes, como: os conceitos de estabilidade e otimalidade aplicados a emparelhamentos (p. 10); a generalização para números distintos de homens e mulheres (p. 13); o exemplo insolúvel de colegas de quarto

(p. 12); o tratamento de universidades com múltiplas vagas usando turmas provisórias (p. 13); e o princípio de que a otimalidade deve ser almejada para o grupo de estudantes, porque “as universidades existem para os estudantes, não o contrário” (p. 10).

Convém citar a homenagem de Roth; Sotomayor (1990, p. 170), feita em vista do fato notável de que uma metodologia parecida já fora desenvolvida pelo NIMP vários anos antes: também Colombo não foi o primeiro a descobrir as Américas, mas seu mérito maior é de ter sido o último; assim, depois dele, a descoberta não precisou ser refeita mais uma vez, ao contrário, possibilitou outras realizações.

GUBITOSO, A.; LOPES, V. Proposta para alocação dos discentes nas turmas de graduação da UFABC: versão 1. *Technical report – CMCC – UFABC*. Santo André: CMCC-UFABC, 2015. Disponível em: <http://cmcc.ufabc.edu.br/images/Pesquisa/TechnicalReports/TR001.pdf>. Data de depósito: 21/10/2015.

Um “relatório técnico” é uma apresentação prévia de uma técnica ou resultado – neste caso, de nossa proposta para o problema das matrículas na UFABC, como discutimos no último capítulo – antes de sua formulação definitiva ou finalizada.

GUSFIELD, D.; IRVING, R. *The stable marriage problem:* structure and algorithms. The MIT Press, 1989.

É mais voltado a questões de ciência da computação, como: (a) a especificação de algoritmos para resolver diversos problemas e a determinação de sua eficiência, isto é, quantos passos os procedimentos realizam até chegar a uma solução, em função do tamanho do problema (como, por exemplo, número de agentes envolvidos), e (b) à estrutura subjacente aos problemas de emparelhamento e seu uso nesses algoritmos.

Por *estrutura*, entendem-se conceitos como o de rotação (que introduzimos em nosso Capítulo 6) ou padrões reconhecidos entre emparelhamentos ou dentro de um emparelhamento, que permitem uma melhor descrição do problema, dos métodos e das soluções.

Por exemplo, considerando somente os problemas de casamento mais simples de nosso Capítulo 1, pode não ser possível comparar duas soluções para um mesmo conjunto de listas de preferência, se um homem melhora enquanto outro piora de situação, mas ambas compartilham um emparelhamento melhor (cada homem recebe a esposa que julga melhor dentre as das duas soluções) e outro pior (cada homem recebe a pior esposa dentre as duas), formando um diagrama de emparelhamentos estáveis chamado *reticulado*. Esse reticulado pode ser usado para vários problemas de determinação e contagem de soluções com propriedades específicas.

KNUTH, D. *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems:* an introduction to the mathematical analysis of algorithms. American Mathematical Society, 1997.

O autor serviu-se do problema de emparelhamento e do algoritmo Gale-Shapley como excelente motivação para ministrar uma série de aulas sobre a ciência da computação, seus assuntos, métodos e questões em aberto. É boa leitura para o estudante que deseja seguir carreira na área, bastando-lhe os conhecimentos universitários iniciais.

Logo em sua pág. 5, Knuth acaba por oferecer um pequeno exemplo de uma regra inestimável: é preciso cuidado com definições semelhantes, mas não equivalentes, utilizadas para um *mesmo* termo por autores variados e com objetivos específicos. De fato, Knuth afirma que emparelhamentos estáveis nem sempre existem quando as listas de preferência são incompletas, dando este conjunto (com outros rótulos) como exemplo:

$$\begin{array}{llll} A: & X & X: & C > A > B \\ B: & Z > X > Y & Y: & B > A > C \\ C: & Z > X & Z: & A > B > C \end{array}$$

Por um lado, seguindo nossas convenções para listas incompletas e o algoritmo de Gale-Shapley, obtemos o emparelhamento $B - Z$, $C - X$, restando A, Y solteiros, que é estável. Por outro, Knuth

requer uma bijeção total entre os conjuntos {A, B, C} e {X, Y, Z} e nota só haver um único tal emparelhamento, consistindo de $A - X$, $B - Y$ e $C - Z$, que não é estável porque é bloqueado pelo par (B,Z).

LINS, M.; CALÔBA, G. *Programação linear:* com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho (data envelopment analysis). Interciência, 2006.

É uma referência lusófona e detalhada para a programação linear e o método *Simplex*.

ROTH, A. The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy*, v. 92, n. 6, p. 991-1016, 1984.

______. The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory*, v. 36, p. 277-288, 1985.

ROTH, A.; PERANSON, E. The redesign of the matching market for american physicians: some engineering aspects of economic design. *The American Economic Review*, v. 89, n. 4, p. 748-780, 1999.

ROTH, A.; SOTOMAYOR, M. The college admissions problem revisited. *Econometrica,* v. 57, n. 3, p. 559-570, 1989.

Esses quatro artigos, assim como Gale; Shapley (1962), são publicações acadêmicas, isto é, textos de apresentação formal de pesquisa científica enviados a periódicos especializados que os submeteram a uma revisão por outro especialista, isto é, os trabalhos foram conferidos quanto a seu rigor e veracidade.

______. *Two-sided matching:* a study in game-theoretic modeling and analysis. Cambridge University Press, 1990.

Este livro organiza e aglutina os resultados anteriores dos autores, assim como de Gale e Shapley e outros colegas, publicados em diversos artigos científicos, a fim de prover uma exposição

unificada. Tornou-se, portanto, uma referência para conhecimento e estudo na área de alocações. Além dos problemas de casamento e de admissão em universidades, o livro incorpora estudos sobre o conceito de “núcleo”, mercados com precificação e leilões, alocações de firmas e trabalhadores e de compradores e vendedores.

ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES. *The prize in economic sciences 2012*: *information for the public: stable matching:* theory, evidence, and practical design. 2012a. Disponível em: <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/popular-economicsciences2012.pdf>. Acesso em: 08/04/2014.

Certamente, todo ano, quando anunciados os agraciados com os prêmios Nobel, há grande interesse do público mundial em saber de suas carreiras e contribuições. A Academia Sueca, responsável pela outorga dos prêmios, prepara essa divulgação para satisfazer nossa curiosidade.

A apresentação explica também que o prêmio de 2012 a Shapley e Roth reconhece todo o trabalho de suas carreiras, não apenas a pesquisa a respeito de emparelhamentos. Por exemplo, Shapley e colegas também desenvolveram um algoritmo para permitir trocas entre agentes de unidades indivisíveis de um recurso, com um procedimento distinto do de Gale-Shapley, mas com a mesma noção de estabilidade. Esse procedimento depois foi visto como adequado para transplantes de rins, em que a “preferência” de um paciente por um rim é expressa por sua compatibilidade.

ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES. *Scientific background on the Sveriges Riksbank Prize in economic sciences in memory of Alfred Nobel 2012: stable allocations and the practice of market design:* compiled by the economic sciences prize committee of the Royal Swedish Academy of Sciences. 2012b. Disponível em: <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/advanced-economicsciences2012.pdf>. Acesso em: 08/04/2014.

A Academia Sueca também prepara uma apresentação científica da outorga, como um retrato das contribuições feitas e seus

desdobramentos. Assim como indicamos Knuth (1997) para o estudante que ingressa na ciência da computação, este *survey* é leitura importante para aquele que se inicia nas ciências econômicas enquanto alude a diversos temas importantes. Contém resultados recentes e uma bibliografia técnica representativa.